INCIDENCIAS CON INCERTIDUMBRE. SU APLICACIÓN A LA TEORÍA DE LOS EFECTOS OLVIDADOS

Carlos N. Rubín
Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Económicas Instituto de Investigaciones en Administración (IADCOM),
Contabilidad y Métodos Cuantitativos para la Gestión (CIMBAGE)
Av. Córdoba 2122, 2° piso, CABA (C1120AAQ), Argentina
cxrubin@gmail.com

Recibido 3 de enero de 2021, aceptado 11 de mayo de 2021

RESUMEN
La Teoría de los Efectos Olvidados es un modelo utilizado con éxito en trabajos de investigación de diferentes campos del conocimiento. Trata el concepto de incidencia con formalidad científica, estudia el efecto que produce un conjunto de entidades sobre otro o sobre sí mismo, procesa la matriz de incidencias y, finalmente, advierte al investigador sobre las eventuales inconsistencias halladas en las valuaciones de incidencias. Las valuaciones pueden ser del tipo binario, endecadario, intervalos de confianza o tripletas de confianza.
Este trabajo trata un caso concreto de aplicación, donde introduce el concepto de incertidumbre en cada incidencia y la expresa con un par ordenado de variables: la primera expresa la máxima presunción y la segunda expresa la incertidumbre asociada a la primera. Es decir, la segunda variable es la probabilidad subjetiva que la primera sea cierta. Se definen y utilizan los Números R, que permiten convertir el par ordenado de variables en una tripleta de confianza.
La incorporación de la incertidumbre permite procesar la confiabilidad de cada valuación. La omisión de la incertidumbre considera a todas las valuaciones con certeza y desaprovecha una información disponible.
Hoy existen sistemas que se alimentan de información generada por la mente humana, lo cual involucra conceptos blandos, susceptibles de ser valuados en efecto y en incertidumbre. De esta forma, se podrían desarrollar modelos de toma de decisiones en temas referidos a medio ambiente, corrupción, sostenibilidad, seguridad, educación, pobreza, bienestar, derechos humanos, inversiones, encuestas, riesgo en general.

Palabras clave: incidencia, incertidumbre, toma de decisiones.
Códigos JEL: C02, C13, M10, Q56.

INCIDENCES WITH UNCERTAINTY. ITS APPLICATION TO THE FORGOTTEN EFFECTS THEORY

Carlos N. Rubín
Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Económicas Instituto de Investigaciones en Administración (IADCOM),
Contabilidad y Métodos Cuantitativos para la Gestión (CIMBAGE)
Av. Córdoba 2122, 2° piso, CABA (C1120AAQ), Argentina
cxrubin@gmail.com

Received January 3rt 2021, accepted May 11th 2021

ABSTRACT
The Theory of Forgotten Effects is a model used successfully in research work in different fields of knowledge. It treats the concept of incidence with scientific formality, studies the effect that one set of entities produces on another or on itself, processes the matrix of incidences and, finally, warns the researcher about possible inconsistencies found in the valuations of incidents. Valuations can be either binary, endecadary, confidence intervals or confidence triplets type.
This work deals with a specific case of application, where it introduces the concept of uncertainty in each incidence and expresses it with an ordered pair of variables: the first expresses the maximum assumption and the second expresses the uncertainty associated with the first. That is, the second variable is the subjective probability that the first is true. R Numbers are defined and used, which allow converting the ordered pair of variables into a confidence triplet.
Incorporating uncertainty allows processing the reliability of each valuation. The omission of uncertainty considers all valuations with certainty and wastes an available information.
Today there are systems that feed on information generated by the human mind, which involves soft concepts, capable of being valued in effect and in uncertainty. In this way, decision-making models could be developed on issues related to environment, corruption, sustainability, security, education, poverty, well-being, human rights, investments, surveys, risk in general.

Keywords: incidence, uncertainty, decision-making.
JEL Codes: C02, C13, M10, Q56.

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente, la humanidad transita por dos revoluciones que marcaron su cultura: la informática y los sistemas inteligentes. De ellos han surgido desarrollos tales como el Internet, la inteligencia artificial (AI), los datos masivos (Big Data), el aprendizaje automático (Machine Learning) o el Internet de las Cosas (IoT).

La información es el elemento básico para tomar decisiones y es esencial para operar, monitorear, controlar y mejorar los sistemas. Asimismo, el tipo de información depende del tipo de sistema que la produce.

Desde la Revolución Industrial, el hombre ha estado familiarizado con los sistemas mecánicos, cuya información surge de aparatos que miden variables relacionadas con el tiempo, la física o la química. Por lo general, los procesos mecánicos se componen de etapas en cadena, que observan una relación entrada-salida estable y predecible.

Actualmente abundan los sistemas que utilizan información generada por la mente humana, llamados sistemas humanos, por oposición a los anteriores. Cuando surja de los sentidos, la información resultará cierta siempre que la agudeza sensorial aporte la certidumbre del caso. La opinión, el criterio y la valuación, en cambio, resultan de un proceso más complejo, de naturaleza borrosa, que siempre estará relacionado a una mayor o menor incertidumbre. Los procesos humanos se nutren de la información humana y conforman sistemas complejos.

Una forma de estudiar el comportamiento de los sistemas complejos es a través de las matrices de incidencia. Expresan el efecto que produce un conjunto de entidades, pertenecientes al sistema, sobre otro conjunto o sobre sí mismo. Las valuaciones de las incidencias deben utilizar un lenguaje apto para expresar la información disponible del sistema. Las herramientas desarrolladas hasta ahora solo evalúan la borrosidad de la incidencia y no consideran la evaluación de la incertidumbre.

La Teoría de los Efectos Olvidados (Kaufmann & Gil-Aluja, 1989) es una herramienta de un gran valor analítico, sólida desde un punto de vista matemático (Linares et al., 2018) y ha sido utilizada con éxito en trabajos de investigación de diferentes campos del conocimiento (Gil-Lafuente & Barcellos, 2010; Gil Lafuente & Bassa, 2011; Alfaro Calderón et al., 2019; Romero & Santoyo, 2019). Trata el concepto de incidencia con formalidad científica, procesa la matriz de incidencias y, finalmente, advierte sobre las eventuales inconsistencias detectadas en la valuación de incidencias (Gento, Lazzari y Machado, 2001).

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Propiedades de la información humana

Las decisiones se basan en información la cual, para ser útil, debe ser confiable. En realidad, la incertidumbre es un fenómeno generalizado y es necesario realizar un estudio formal de la información humana.

Una propiedad de la información humana es la *borrosidad* del lenguaje natural. La lógica binaria no es adecuada para expresar la información de los sistemas humanos ni de los sistemas complejos.

Según el principio de incompatibilidad (Zadeh, 1972), en los sistemas complejos, como los humanos, las afirmaciones de su comportamiento, si son relevantes son imprecisas y si son precisas son irrelevantes. Por lo tanto, resulta necesario el uso de lenguajes que sean tolerantes a la imprecisión y que puedan generar afirmaciones relevantes.

La *lógica borrosa* establece el grado de membresía o membership degree, ($0 \leq \mu \leq 1$), un concepto que expresa la pertenencia gradual de un elemento a un conjunto dado (Zadeh, 1965). Este concepto permite formular predicados significativos que sean tolerantes a la imprecisión.

Otra propiedad de la información humana es la *incertidumbre*. Se puede afirmar que cualquier estimación, valuación u opinión está sujeta tanto a la calidad de las fuentes de información como al ámbito personal en que nos manejamos: conocimientos, experiencia, enfoque, prejuicios, intuición, hipótesis. Como todo esto es limitado frente a la complejidad de los fenómenos del mundo real, siempre habrá incertidumbre.

En la matriz de incidencias de un sistema humano, la valuación de cada incidencia estará asociada a una incertidumbre propia. Un análisis que las omita considera que todas las valuaciones de incidencias no tienen incertidumbre, desaprovechando una información disponible.

Es necesario cuantificar la incertidumbre, es decir, encontrar un modo perceptible para conocer la incertidumbre afectada a una valuación. Este tema encuentra respuesta en el concepto de probabilidad subjetiva, que se trata en la sección siguiente.

2.2. Concepción subjetivista de la probabilidad

Hace más de 2400 años, los filósofos griegos pensaban cómo evaluar la probabilidad de que sea cierta una opinión. Reconocían que no podíamos acceder a la evidencia y analizaban si nuestra inteligencia nos permitía percibir cuán cerca o lejos estábamos de la misma.

A continuación, se presenta una cronología.

Platón (427 – 347 a.C.) afirmó que la opinión es una concepción que no está confirmada por la razón; es una conjetura del espíritu; una noción cuya verdad o cuya falsedad demuestra el razonamiento.

Pirrón de Elis (360 – 270 a.C.) fue un filósofo griego que hizo de la duda el problema central de su filosofía. Según Pirrón, todas nuestras percepciones son relativas, puesto que éstas solo nos retratan la realidad tal como aparecen “filtradas” por nuestros sentidos.

Carnéades de Cirene (214 – 129 a.C.) es el fundador de la 3ra Academia de Atenas. Si bien niega que al hombre le fuera posible conocer la verdad con caracteres de certeza, aceptó que puede evaluar la probabilidad que sea cierta una opinión.

Sexto Empírico (160 – 210), médico y filósofo griego, un representante importante del escepticismo de Pirrón de Elis, expresó que no poseemos la evidencia, pero sí la probabilidad. También refirió que nuestra mente percibe apariencias más o menos confusas, que si bien no nos conducen a lo verdadero nos guían hacia lo probable, lo cual nos permite opinar. Desarrolló la Doctrina de la Probabilidad consistente en reconocer que es posible establecer una escala de probabilidades, cuyo más alto valor le permite al sabio tener una mejor opinión.

Thomas Bayes (1702 – 1761), matemático y teólogo inglés, desarrolló teoremas sobre la probabilidad subjetiva que tuvieron gran repercusión en la ciencia, la economía y el derecho. Es el primer matemático que estudia el concepto de probabilidad subjetiva.

En el siglo XX, el concepto de probabilidad subjetiva es desarrollado por destacados probabilistas.

Bruno De Finetti (1906 – 1985), es unánimemente considerado como una de las figuras más relevantes en la estadística del siglo XX. Uno de sus aportes más trascendentes ha sido la formalización del concepto de probabilidad como grado de creencia, o probabilidad subjetiva, que permite un tratamiento riguroso del concepto de probabilidad que se deduce a partir de la teoría de la decisión.

Dennis Lindley (1923 – 2013), probabilístico inglés, investigador de la teoría de la decisión y de la estadística bayesiana. Afirmó que la incertidumbre está en todas partes y no podemos escapar de ella. Llegó a expresar que la incertidumbre es un asunto personal, es decir, que no se debería hablar de "la incertidumbre" sino de "mi incertidumbre". Afirmó que "sea cual sea la forma en que se aborda la incertidumbre, la probabilidad es la *única* manera sólida de pensar en ello".

Lotfi Zadeh (1921 – 2017), ingeniero azerí que estudió en los EEUU, fue profesor en la Universidad de Berkeley, donde desarrolló el concepto de Fuzzy Logic (1965). Como profesor emérito investigó el Soft Computing (1991) y los Números Z (2011), que se ocupan de estudiar la confiabilidad de la información. Un Número Z tiene dos componentes Z = (A, B), donde A es una restricción de los valores que puede tomar una variable incierta X y B es una medida de la confiabilidad de A. B es la probabilidad teórica, B = Prob (X = A), o bien, la distribución de esta probabilidad.

Los Números Z presentan una dificultad práctica. No siempre se conoce la probabilidad teórica y, menos aún, se puede acceder a su distribución.

En general, cuando una persona emite una opinión o da una respuesta, es consciente de su certeza o grado de confianza. Esta información, si bien es privada y puede ser confidencial, siempre está disponible en la mente del sujeto y constituye el concepto de *probabilidad subjetiva.*

La probabilidad subjetiva se evalúa cualitativa o cuantitativamente, y se refiere a una intuición o juicio personal que hace un experto sobre algo incierto. Se utiliza cuando no se dispone de otra forma de valuación, por ejemplo, cuando un médico valúa el riesgo quirúrgico de una operación.

En base a lo antes mencionado, aceptamos que la incertidumbre, grado de creencia o confiabilidad de una variable incierta se exprese mediante la probabilidad subjetiva. Es decir, primero se valúa la variable incierta con el criterio de la máxima presunción y, seguidamente, el evaluador valúa la probabilidad subjetiva que esa valuación sea cierta. En las tripletas de confianza, utilizadas para expresar matemáticamente la incertidumbre, los extremos inferior y superior se perciben en forma indirecta por nuestra mente dificultando su valuación. En cambio, la máxima presunción y la probabilidad subjetiva se perciben en forma directa, y son más fáciles de valuar. En consecuencia, convendría valuar la máxima presunción y la probabilidad subjetiva para que, finalmente, sean convertidas en una tripleta de confianza equivalente.

2.3. Número R y Número Borroso R

Los Números R expresan la valuación de una variable incierta X.

R = (V, P), donde:

- V ($0 \leq V \leq 1$): máxima presunción del valor que puede tomar X.
- P ($0 \leq P \leq 1$): probabilidad subjetiva o grado de creencia que sea cierta la condición (X=V). Es la certidumbre o confiabilidad de V.

V y P se pueden expresar en distintos sistemas de escalas matizadas, cada uno de los cuales tiene su propia correspondencia semántica.

- Ternario (0, 0.5, 1)
- Quinario (0, 0.2, 0.5, 0.8, 1)
- Senario (0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1)
- Endecadario (0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1)

V puede utilizar un sistema endecadario por su buena sensibilidad de evaluación. P, en cambio, tiene menor sensibilidad de valuación y puede convenir expresarlo en un sistema quinario.

Operando matemáticamente con V y P se puede definir (a_1, a_2, a_3), una tripleta que expresa los límites de incertidumbre y el valor máximo de presunción de la variable incierta: $a_1 \leq a_2 \leq a_3$

a_1 = límite inferior de incertidumbre

a_2 = máximo de presunción

a_3 = límite superior de incertidumbre

R = (V, P) se identifica con el número borroso triangular $\tilde{R}$ = (a_1, a_2, a_3).

Un número borroso es un conjunto borroso del referencial de los reales, convexo y normal. Un número borroso triangular (NBT) es un número borroso real y continuo, cuya función de pertenencia determina un triángulo con el eje horizontal. La función de pertenencia alcanza el valor uno para un único número real, siendo lineal a izquierda y derecha del mismo. Un NBT queda definido por tres números reales (a_1, a_2, a_3).

Los conjuntos borrosos y los números borrosos, de los cuales los NBT son un caso particular, han sido tratados por numerosos autores. Mencionamos a Lazzari, Machado y Pérez (1994, 1998); Zimmermann, H.; Klir, G. y Yuan, B.; Trillas, E., Alsina, C. y Terricabras, J.

En nuestro caso:

$$\tilde{R} = (a_1, a_2, a_3), \qquad a_1, a_2, a_3 \; \varepsilon \; [0, 1] \tag{1}$$

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3$$

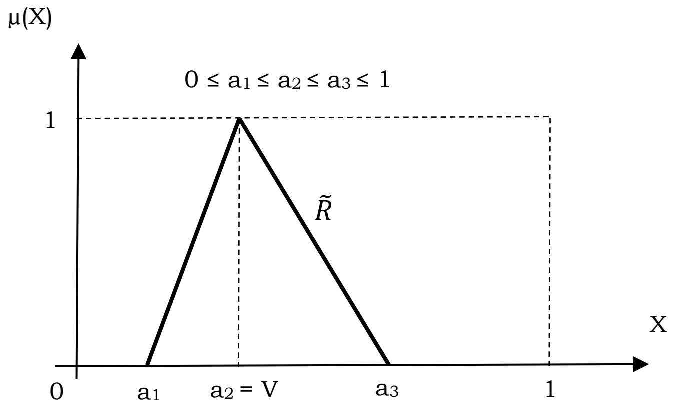

Figura 1.- Número borroso triangular $\tilde{R}$

Fuente: Elaboración propia

La probabilidad subjetiva (P) se relaciona con la certidumbre, por lo que la magnitud (1 – P) se relaciona con la incertidumbre. Si se observa la Fig. 1, la magnitud ($a_3 - a_1$) es la incertidumbre de X. A continuación, se plantean distintas relaciones referidas a la incertidumbre.

($a_3 - a_1$): incertidumbre X

(1 – 0): amplitud dominio X

$$\frac{a_3 - a_1}{1 - 0} = \frac{\text{incertidumbre X}}{\text{dominio X}} = (1 - P) \tag{2}$$

Aplicamos el concepto anterior hacia ambos lados:

($V - a_1$): incertidumbre X izq.

(V – 0): amplitud sub-dominio X izq.

$$\frac{V - a_1}{V - 0} = \frac{\text{incertidumbre X}_{\text{izq}}}{\text{sub} - \text{dominio X}_{\text{izq}}} = (1 - P) \tag{3}$$

($a_3 - V$): incertidumbre X der.

(1 – V): amplitud sub-dominio X der.

$$\frac{a_3 - V}{1 - V} = \frac{\text{incertidumbre X}_{\text{der}}}{\text{sub} - \text{dominio X}_{\text{der}}} = (1 - P) \tag{4}$$

Operando las relaciones se obtiene (a_1, a_2, a_3) en función de (V, P),

$$a_1 = VP \tag{5}$$

$$a_2 = V \tag{6}$$

$$a_3 = VP + (1\text{-}P) \tag{7}$$

$$\mathbf{(a_1, a_2, a_3) = \{VP, V, [VP + (1 - P)]\}} \tag{8}$$

y se obtiene (V, P) en función de (a_1, a_2, a_3):

$$V = a_2 \tag{9}$$

$$P = 1 - (a_3 - a_1) \tag{10}$$

$$\mathbf{(V, P) = \{a_2, [1-(a_3-a_1)]\}} \tag{11}$$

También P se puede determinar con la expresión $P = a_1/a_2$, pero no la consideramos porque solo tiene validez para valores no nulos de a_2.

3. APLICACIÓN

3.1. Presentación del caso

La metodología de la Teoría de los Efectos Olvidados está desarrollada en el trabajo original (Kaufmann & Gil-Aluja, 1989). De allí se tomó como referencia un caso que relaciona los aspectos técnicos de un automóvil con las cualidades percibidas por los conductores. En nuestra aplicación se redujo el número de variables a fin de simplificar. En filas se consideraron cuatro aspectos nítidos, de índole técnica.

t_1 = potencia del motor

t_2 = suspensión

t_3 = precio

t_4 = calidad del frenado

En columnas, se consideraron tres cualidades inciertas, apreciadas por los conductores:

c_1 = seguridad

c_2 = confort

c_3 = prestigio social

El caso de aplicación muestra la relación entre un conjunto referencial de entidades, T, que expresa características nítidas del automotor,

$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$

que tiene una *incidencia* sobre otro conjunto referencial de entidades, C, que expresa las propiedades inciertas apreciadas por los conductores:

$C = \{c_1, c_2, c_3\}$

La incidencia de T_i sobre C_j, correspondiente al par (T_i, C_j), se valúa con los Números R (V, P), antes descriptos. Éstos ofrecen mayor libertad al experto (o expertos), que expresa su mejor presunción (V) y su percepción de la confiabilidad asociada (P).

Brevemente se describe el método de procesamiento.

- Se realizan las valuaciones (V_{ij}, P_{ij}) definiendo la matriz de incidencia entre los conjuntos referenciales T y C.
- Cada valuación (V_{ij}, P_{ij}) es convertida en su equivalente en Números Borrosos R, NBR (a_1, a_2, a_3). De este modo, se define una matriz expresada en tripletas de confianza.
- La matriz es desglosada en tres matrices, cada una de las cuales se genera con los términos de la tripleta (a_1, a_2, a_3).

- Se procede como se indica en el trabajo original de la Teoría de los Efectos Olvidados, para el caso de tripletas de confianza.

Se usarán los sistemas de valuación que sean más convenientes, en función de la sensibilidad de la variable asociada. Por esta razón se eligió un sistema endecadario para V (Tabla 1) y un sistema quinario para P (Tabla 2).

Tabla 1. Sistema endecadario

Máxima Presunción	
V	**Semántica**
0	sin incidencia
0.1	prácticamente sin incidencia
0.2	casi sin incidencia
0.3	muy débil incidencia
0.4	débil incidencia
0.5	mediana incidencia
0.6	incidencia sensible
0.7	bastante incidencia
0.8	fuerte incidencia
0.9	muy fuerte incidencia
1	la mayor incidencia

Fuente: Elaboración propia

Tabla 2. Sistema quinario

Probabilidad Subjetiva	
P	**Semántica**
0	falso
0.2	casi falso
0.5	ni verdadero ni falso
0.8	casi verdadero
1	verdadero

Fuente: Elaboración propia

3.2. Evaluación con Números R

Un conductor experto realiza las siguientes valuaciones:

Tabla 3. Matriz de incidencia Ƭ = T x T, en Números R (V, P)

Ƭ = T x T	potencia	suspensión	precio	frenado
potencia	(1, 1)	(0.6, 0.5)	(1, 0.8)	(0.8, 0.8)
suspensión	(0.2, 0.8)	(1, 1)	(0.8, 0.8)	(0.4, 0.5)
precio	(0.6, 0.5)	(0.6, 0.5)	(1, 1)	(0.6, 0.5)
frenado	(0.2, 0.8)	(0.6, 0.5)	(0.8, 0.8)	(1, 1)

Fuente: Elaboración propia

Tabla 4. Matriz de incidencia Ϻ = T x C, en Números R (V, P)

Ϻ = T x C	seguridad	confort	prestigio
potencia	(0.8, 0.8)	(0.7, 0.5)	(1, 0.8)
suspensión	(0.6, 0.5)	(1, 0.8)	(0.8, 0.8)
precio	(0.6, 0.8)	(0.7, 0.5)	(0.8, 1)
frenado	(1, 1)	(0.4, 0.5)	(0.6, 0.5)

Fuente: Elaboración propia

Tabla 5. Matriz de incidencia $\mathcal{C}$ = C x C, en Números R (V, P)

$\mathcal{C}$ = C x C	seguridad	confort	prestigio
seguridad	(1, 1)	(0.6, 0.5)	(1, 0.8)
confort	(0.6, 0.5)	(1, 1)	(0.8, 0.8)
prestigio	(0.8, 0.8)	(0.6, 0.5)	(1, 1)

Fuente: Elaboración propia

3.3. Conversión de Números R a NBR

Conversión de Número R (V, P) a Número Borroso R, NBR (a_1, a_2, a_3):

$$(a_1, a_2, a_3) = \{VP, V, [VP + (1 - P)]\} \tag{12}$$

Tabla 6. Matriz de incidencia T x T, en NBR (a_1, a_2, a_3)

T = T x T	potencia	suspensión	precio	frenado
potencia	(1.00,1.00,1.00)	(0.30,0.60,0.80)	(0.80,1.00,1.00)	(0.64,0.80,0.84)
suspensión	(0.16,0.20,0.36)	(1.00,1.00,1.00)	(0.64,0.80,0.84)	(0.20,0.40,0.70)
precio	(0.30,0.60,0.80)	(0.30,0.60,0.80)	(1.00,1.00,1.00)	(0.30,0.60,0.80)
frenado	(0.16,0.20,0.36)	(0.30,0.60,0.80)	(0.64,0.80,0.84)	(1.00,1.00,1.00)

Fuente: Elaboración propia

Tabla 7. Matriz de incidencia T x C, en NBR (a_1, a_2, a_3)

M = T x C	seguridad	confort	prestigio
potencia	(0.64,0.80,0.84)	(0.35,0.70,0.85)	(0.80,1.00,1.00)
suspensión	(0.30,0.60,0.80)	(0.80,1.00,1.00)	(0.64,0.80,0.84)
precio	(0.48,0.60,0.68)	(0.35,0.70,0.85)	(0.80,0.80,0.80)
frenado	(1.00,1.00,1.00)	(0.20,0.40,0.70)	(0.30,0.60,0.80)

Fuente: Elaboración propia

Tabla 8. Matriz de incidencia C x C, en NBR (a_1, a_2, a_3)

$\mathcal{C}$ = C x C	seguridad	confort	prestigio
seguridad	(1.00,1.00,1.00)	(0.30,0.60,0.80)	(0.80,1.00,1.00)
confort	(0.30,0.60,0.80)	(1.00,1.00,1.00)	(0.64,0.80,0.84)
prestigio	(0.64,0.80,0.84)	(0.30,0.60,0.80)	(1.00,1.00,1.00)

Fuente: Elaboración propia

3.4. Cálculo de M*

Aplicando la Teoría de los Efectos Olvidados, se calcula la convolución max-min M* dada por la expresión (13):

$$M^* = T \circ M \circ \mathcal{C} \tag{13}$$

Como se puede advertir, cada una de las matrices M, T y $\mathcal{C}$ comprenden tres matrices independientes, una para cada uno de los términos de la tripleta (a_1, a_2 y a_3). Por lo tanto, para el procesamiento desglosamos la expresión anterior en función de estos términos.

$$M^*(a_1, a_2, a_3) \equiv M^*(a_1), M^*(a_2), M^*(a_3) \tag{14}$$

$$M^*(a_1) = T(a_1) \circ M(a_1) \circ \mathcal{C}(a_1) \tag{15}$$

$$M^*(a_2) = T(a_2) \circ M(a_2) \circ \mathcal{C}(a_2) \tag{16}$$

$$M^*(a_3) = T(a_3) \circ M(a_3) \circ \mathcal{C}(a_3) \tag{17}$$

3.4.1. Cálculo de M*(a_1)

Presentamos las matrices $M(a_1)$, $T(a_1)$ y $C(a_1)$.

Tabla 9. Matriz de incidencia T (a_1)

T (a_1)	potencia	suspensión	precio	frenado
potencia	1.00	0.30	0.80	0.64
suspensión	0.16	1.00	0.64	0.20
precio	0.30	0.30	1.00	0.30
frenado	0.16	0.30	0.64	1.00

Fuente: Elaboración propia

Tabla 10. Matriz de incidencia M (a_1)

M (a_1)	seguridad	confort	prestigio
potencia	0.64	0.35	0.80
suspensión	0.30	0.80	0.64
precio	0.48	0.35	0.80
frenado	1.00	0.20	0.30

Fuente: Elaboración propia

Tabla 11. Matriz de incidencia C (a_1)

C (a_1)	seguridad	confort	prestigio
seguridad	1.00	0.30	0.80
confort	0.30	1.00	0.64
prestigio	0.64	0.30	1.00

Fuente: Elaboración propia

Se calcula la convolución máx-mín $M(a_1)^*$:

$$M(a_1)^* = T(a_1) \circ M(a_1) \circ C(a_1) \tag{18}$$

Primero calculamos $[T(a_1) \circ M(a_1)]$. Se muestra parte de la operatoria.

$[T(a_1) \circ M(a_1)]_{11}$ =

$[T(a_1)_{11} \cap M(a_1)_{11}]$ U $[T(a_1)_{12} \cap M(a_1)_{21}]$ U $[T(a_1)_{13} \cap M(a_1)_{31}]$ U $[T(a_1)_{14} \cap M(a_1)_{41}]$

= $(1.00 \cap 0.64)$ U $(0.25 \cap 0.30)$ U $(0.80 \cap 0.48)$ U $(0.6$
$4 \cap 1.00)$

= 0.64 U 0.30 U 0.48 U 0.64 = **0.64**

$[T(a_1) \circ M(a_1)]_{12}$ =

$[T(a_1)_{11} \cap M(a_1)_{21}]$ U $[T(a_1)_{12} \cap M(a_1)_{22}]$ U $[T(a_1)_{13} \cap M(a_1)_{23}]$ U $[T(a_1)_{14} \cap M(a_1)_{24}]$

= $(1.00 \cap 0.35)$ U $(0.25 \cap 0.80)$ U $(0.80 \cap 0.35)$ U $(0.64 \cap 0.20)$

= 0.35 U 0.30 U 0.35 U 0.20 = **0.35**

$[T(a_1) \circ M(a_1)]_{13}$ =

= $[(T(a_1)_{11} \cap T(a_1)_{31})$ U $(T(a_1)_{12} \cap T(a_1)_{32})$ U $(T(a_1)_{13} \cap T(a_1)_{33})$ U $(T(a_1)_{14} \cap T(a_1)_{34})]$

= [(1.00∩0.80) U (0.25∩0.64) U (0.80∩0.80) U (0.64∩0.30]

= [0.80 U 0.30 U 0.80 U 0.30] = **0.80**

Tabla 12. Convolución max-min [T(a_1) ∘ M(a_1)]

T(a_1) ∘ M(a_1)	seguridad	confort	prestigio
potencia	**0.64**	**0.35**	**0.80**
suspensión	0.48	0.80	0.64
precio	0.48	0.35	0.80
frenado	1.00	0.35	0.64

Fuente: Elaboración propia

Seguidamente, calculamos M*(a_1) = [T(a_1) ∘ M(a_1)] ∘ C(a_1)

Tabla 13. Convolución max-min M*(a_1) = [T(a_1) ∘ M(a_1)] ∘ C(a_1)

M*(a_1)	seguridad	confort	prestigio
potencia	0.64	0.35	0.80
suspensión	0.64	0.80	0.64
precio	0.64	0.35	0.80
frenado	1.00	0.35	0.80

Fuente: Elaboración propia

3.4.2. Cálculo de M*(a_2) y M*(a_3)

Tabla 14. Convolución M*(a_2) = T(a_2) ∘ M(a_2)] ∘ C(a_2)

M*(a_2)	seguridad	confort	prestigio
potencia	0.80	0.70	1
suspensión	0.80	1	0.80
precio	0.80	0.70	0.80
frenado	1	0.70	1

Fuente: Elaboración propia

Tabla 15. Convolución M*(a_3) = [T(a_3) ∘ M(a_3)] ∘ C(a_3)

M*(a_3)	seguridad	confort	prestigio
potencia	0.84	0.85	1
suspensión	0.80	1	0.84
precio	0.80	0.85	0.84
frenado	1	0.84	1

Fuente: Elaboración propia

3.5. Cálculo de M*

Las Tablas 13, 14 y 15 se integran en la Tabla 16.

Tabla 16. Matriz M*(a_1, a_2, a_3)

M*(a_1, a_2, a_3)	seguridad	confort	prestigio
potencia	(0.64,0.80,0.84)	(0.35,0.70,0.85)	(0.80,1.00,1.00)
suspensión	(0.64,0.80,0.80)	(0.80,1.00,1.00)	(0.35,0.80,0.84)
precio	(0.64,0.80,0.80)	(0.35,0.70,0.85)	(0.80,0.80,0.84)
frenado	(1.00,1.00,1.00)	(0.35,0.70,0.84)	(0.64,1.00,1.00)

Fuente: Elaboración propia

3.6. Cálculo de M* – M

Esta etapa es la más importante de la Teoría de los Efectos Olvidados, dado que es la devolución al experto. Mostramos dos posibles variantes:

3.6.1. Diferencia con tripletas de confianza

Se plantea la expresión a procesar:

$$M^* - M = M^* (a_1, a_2, a_3) - M (a_1, a_2, a_3) \tag{19}$$

Se aplica el concepto de distancia entre dos tripletas de confianza:

Distancia d (m, n) entre (m_1, m_2, m_3) y (n_1, n_2, n_3)

$$d(m,n) = \frac{(m_1 - n_1) + 2(m_2 - n_2) + (m_3 - n_3)}{4} \tag{20}$$

En nuestro caso sería:

$$d(a^*,a) = \frac{(a^*{}_1 - a_1) + 2(a^*{}_2 - a_2) + (a^*{}_3 - a_3)}{4} \tag{21}$$

Se opera con las matrices de las Tablas 7 y 16

Tabla 17. Matriz D (a_1, a_2, a_3) = M* (a_1, a_2, a_3) – M (a_1, a_2, a_3)

M* – M	seguridad	confort	prestigio
potencia	0	0	0
suspensión	0.13	0	0.07
precio	**0.17**	0	0
frenado	0	**0.44**	**0.28**

Fuente: Elaboración propia

La Tabla 17 ofrece información al evaluador para que reconsidere las incidencias del frenado sobre el confort y sobre el prestigio social. En menor escala, repensar la incidencia del precio sobre la seguridad. En cada caso, el evaluador debe decidir cómo modificar la tripleta de interés de la Tabla 7, lo cual es muy difícil porque no hay referencias claras.

3.6.2. Diferencias con Números R

La Matriz M*(a_1, a_2, a_3), expresada en la Tabla 16, se la procesa para convertirla en Números R, M* (V, P). De esta forma, se podrá comparar con la Matriz M (V, P) de la Tabla 5. Se utilizan las siguientes expresiones:

$$V = a_2 \tag{22}$$

$$P = 1 - (a_3 - a_1) \tag{23}$$

Tabla 18. Matriz M* en Números R (V, P)

M*(V,P)	seguridad	confort	prestigio
potencia	(0.8, 0.8)	(0.7, 0.5)	(1, 0.8)
suspensión	(0.8, 0.55)	(1, 0.8)	(0.8, 0.5)
precio	(0.8, 0.84)	(0.7, 0.5)	(0.8, 1)
frenado	(1, 1)	(0.7, 0.5)	(1, 0.6)

Fuente: Elaboración propia

Se calcula la diferencia en Números R, resultando la Matriz D (V, P), operando con las

Tablas 4 y 18, mediante la expresión:

$$\text{Matriz } D\ (V, P) = M^*\ (V, P) - M\ (V, P) \tag{24}$$

Tabla 19. Matriz D (V, P)

D(V,P)	seguridad	confort	prestigio
potencia	(0.0, 0.0)	(0.0, 0,0)	(0.0, 0.0)
suspensión	(**0.2**, 0.0)	(0.0, 0.0)	(0.0, **0.3**)
precio	(**0.2**, 0,0)	(0.0, 0.0)	(0.0, 0.0)
frenado	(0.0, 0.0)	(**0.3**, 0.0)	(**0.4**, **0.1**)

Fuente: Elaboración propia

La Matriz D (V, P), de la Tabla 19, expresa las diferencias encontradas en las valuaciones separando la componente de máxima presunción (V) de la confiabilidad (P). La información obtenida sugiere al investigador reconsiderar la incidencia de la suspensión sobre el prestigio, solo en cuanto a su confiabilidad, y a reconsiderar las incidencias del frenado sobre el confort y el prestigio social, en su máxima presunción y en su confiabilidad. En menor escala, se sugiere reconsiderar la incidencia del precio y la suspensión sobre la seguridad, en su máxima presunción.

Esta alternativa permite que el experto interprete con mayor claridad la devolución de la Teoría de los Efectos Olvidados, dado que puede prever específicamente cada una de las diferencias detectadas.

4. DISCUSIÓN

Con la alternativa de diferencia de tripletas de confianza, sin considerar los Números R, el investigador no sabe cómo proceder con la devolución, para corregir la tripleta original (a_1, a_2, a_3), es decir, no dispone de un criterio para modificar uno, dos o todos los términos.

En cambio, utilizando la diferencia de Números R (V, P), el experto interpreta la información, a partir de conocer la diferencia de la máxima presunción y la confiabilidad, en forma separada, lo cual da un criterio válido para considerar una eventual corrección.

5. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Sobre la base de la aplicación aquí tratada, los Números R son una herramienta superadora para usar en la Teoría de los Efectos Olvidados.

Una información afectada de incertidumbre debería ser valuada tanto en su borrosidad como en su confiabilidad, para evitar perder información disponible. En este marco de trabajo, los Números R (V, P) constituyen un lenguaje apto para que un experto evalúe cualquier relación borrosa, a partir de su máxima presunción y de su probabilidad subjetiva, y la exprese en un número borroso triangular (NBT).

Asimismo, se destaca que los NBT se usan en una amplia diversidad de aplicaciones para el tratamiento práctico de la incertidumbre humana. Por lo tanto, los Números R tienen un importante campo por explorar en aplicaciones de sistemas humanos.

Otra veta de investigación futura es la modelización con Números R.

REFERENCIAS

Alfaro Calderón, G. G., Godínez Reyes, N. L., Gómez-Monge, R., Alfaro-García, V. G., & Gil Lafuente, A. M. (2019). Forgotten effects in the valuation of the social well-being index in Mexico's sustainable development. Fuzzy Economic Review, 2019, vol. 24, núm. 1, p. 67-81.

Azcárate, P. (1872). Obras Completas de Platón. 11 volúmenes. Madrid: Medina y Navarro (Biblioteca filosófica).

De Finetti, B. (1972). Probability, induction and statistics: The art of guessing. London. Ed. J. Wiley.

______ (1974a). Theory of Probability: A critical treatment, Vol. 1. New York. Wiley.

______ (1974b). Theory of Probability: A critical treatment, Vol. 2. New York. Wiley.

Gento, A., Lazzari, L.L. y Machado, E.A.M. (2001). Reflexiones acerca de las matrices de incidencia y de la recuperación de efectos olvidados. Cuadernos del CIMBAGE, No. 4, pp. 11-27.

Gil Lafuente, A.M. y Barcellos de Paula, L. (2010). Una aplicación de la metodología de efectos olvidados: los factores que contribuyen al crecimiento sostenible de la empresa. Cuadernos del CIMBAGE, No. 12, pp. 23-52.

Gil Lafuente, A.M. y Bassa, C.L. (2011). Identificación de los atributos contemplados por los clientes en una estrategia CRM utilizando el modelo de efectos olvidados. Cuadernos del CIMBAGE, No. 13, pp. 107-127.

Kaufmann, A. y Gil Aluja, J. (1989). Modelos para la investigación de efectos olvidados. Santiago de Compostela: Editorial Milladoiro. p. 17 y pp. 51 -54.

Klir, G. y Yuan, B. (1995). Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications. Nueva Jersey. Prentice-Hall PTR.

Lazzari, L.; Machado, E. y Pérez, R. (1994). Matemática Borrosa, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires.

______ (1998). Teoría de la decisión fuzzy, Buenos Aires. Ediciones Macchi. pp. 106-196

Linares-Mustarós, S., Gil-Lafuente, A. M., Coll, D. C., & Ferrer-Comalat, J. C. (2018, January). Premises for the theory of forgotten effects. In International Conference on Modelling and Simulation in Management Sciences (pp. 206-215). Springer, Cham.

Lindley, D. (2006). Understanding uncertainty. London. Ed: J. Wiley.

______ (2008). Uncertainty. Einstein, Heisenberg, Bohr, and the struggle for the Soul of Science. Nueva York. Knopf Doubleday Publishing Group.

Romero, B. F., & Santoyo, F. G. (2019). Forgotten effects and their application in the development of the Michoacán MSMEs. Fuzzy Economic Review, 24(2).

Trillas, E.; Alsina, C. y Terricabras, J. (1995). Introducción a la lógica borrosa. Barcelona. Ariel.

Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy Sets. Information and Control, 8, pp. 338-353.

______ (2011a). A Note on Z-numbers. Information Sciences, 181, pp. 2923-2932.

______ (2011b). The concept of a Z-number – a new direction in uncertain computation. Proceedings of the IEEE International Conference on Information Reuse and Integration, (IRI) Las Vegas, USA.

Zimmermann, H. (1991). Fuzzy set theory and its applications. Boston. Kluwer Academic Publishers.