

APLICACIONES ACTUARIALES DE LA TEORÍA DE LOS SUBCONJUNTOS BORROSOS¹

Jorge de Andrés Sánchez y Antonio Terceño Gómez

En este trabajo exploramos diferentes posibilidades de aplicación de la teoría de los subconjuntos borrosos (TSB) en áreas del análisis actuarial, ya que por su gran capacidad para representar y manipular información vaga, poco estructurada o de carácter subjetivo, puede ser útil en circunstancias en que la decisión del asegurador deba basarse, al menos parcialmente, en información de estas características. En concreto, exploramos la aplicabilidad de la TSB en la selección de riesgos, en la agrupación de riesgos, en la decisión sobre una política de reaseguros óptima y en la valoración financiera de los seguros de vida. Palabras clave: Teoría de los subconjuntos borrosos, decisiones en la empresa aseguradora, seguros de no vida, seguros de vida, valoración financiera.

1. INTRODUCCIÓN

El objeto del presente trabajo es ofrecer una reflexión sobre diversas utilidades que puede proporcionar la teoría de los subconjuntos borrosos (TSB) en la toma de decisiones del asegurador. No obstante, quisiéramos remarcar que, en cualquier caso, no vamos a poner en cuestión la estadística como herramienta básica de la

¹ Los autores agradecen los comentarios de los evaluadores.

ciencia actuarial, pues, en nuestra opinión el análisis cuantitativo de los seguros debe ser básicamente estadístico.

Por otra parte, tampoco debemos perder de vista que en determinados aspectos de la toma de decisiones del asegurador, como las variables que se deben utilizar, la manipulación del valor de las mismas para llegar a una decisión final, etc.; bien, están delimitados o definidas de forma imprecisa. Por otra parte, muchas decisiones se basan en factores como la experiencia y la subjetividad del decisor, por ejemplo, en el ámbito de los seguros sanitarios, no son conceptos nítidos “hábitos saludables” o “actividades de riesgo”. Otras variables como el tipo de interés o la inflación, aunque pueden estar delimitadas, su predicción futura mediante la estadística, sobre todo en horizontes evaluatorios largos como en los seguros de vida, es, cuanto menos, irreal. Por ello, los actuarios suelen estimar estas magnitudes mediante un valor cierto, pero subjetivo, y, posteriormente realizan análisis de sensibilidad, suponiendo variaciones que se consideran razonables.

Es en este contexto en el que debemos entender la utilidad de la TSB en el campo actuarial. Nosotros analizaremos algunas aplicaciones de la TSB propuestas por diferentes autores en el campo de la decisión en la empresa aseguradora. De forma más concreta:

- a) Abordaremos el problema que implica la decisión sobre aceptar o no un riesgo, esto es, la determinación de si una póliza es asegurable.

- b) La clasificación de diversos asegurados, áreas geográficas, etc. en diferentes clases.
- c) La determinación de la política óptima de reaseguro con criterios múltiples.
- d) Valoración de los seguros de vida con parámetros inciertos.

2. DETERMINACIÓN DEL RIESGO ASEGURABLE

Una compañía de seguros, como cualquier otra empresa, para ser competitiva debe ofrecer unos precios (primas) lo más reducidos posibles, pero, asimismo, éstos deben poder permitir asegurar la estabilidad de la misma. En este contexto, una decisión esencial es determinar el concepto de “riesgo asegurable” o “riesgo preferido”, tanto para productos más estándares, como para aquellos más específicos (que, por otra parte, suelen comportar cuantías aseguradas muy elevadas), de tal forma que lleve a la especialización en aquellos tipos de asegurados que, por su filosofía, tipología de la cartera, características del contexto geográfico donde opera, etc. pueda ajustarles mejor las primas de sus coberturas.

Si bien, la fijación del precio de la cobertura debe ser realizada mediante instrumentos estadísticos, la decisión de aceptar un riesgo, o de determinar hasta que punto, si el asegurado es aceptado, la prima debe ser recargada, se realiza en muchas ocasiones de forma subjetiva, con criterios especificados de forma vaga. En este contexto, (Lemaire 1990) propone una metodología borrosa que permite determinar hasta que punto un potencial asegurado es deseable, la cual, permite modelizar de forma bastante realista el proceso que se lleva a cabo para tomar la decisión final.

En este sentido, y de una forma quizás menos elaborada, podemos encontrar los trabajos de (Jablonowski, 1991 y De Wit 1982). El ramo de automóviles es uno de los ejemplos más claros al respecto. En la actividad diaria se determina si un riesgo es asegurable, basándose la decisión final en criterios como *conductor joven*, *conductor con experiencia*, *coche potente*, etc.

En este sentido, una forma muy razonable de determinar si un riesgo es asegurable, asumiéndose que se deben cumplir n requisitos, sería aceptar que éstos no únicamente "se cumplen" o "no se cumplen"; sino que se pueden dar en cierto grado (poco, mucho, bastante, etc.). Ello implicaría utilizar una regla como:

Si el requisito 1 se cumple en un grado μ_1 , el requisito 2 se cumple en un grado μ_2, \dots , y el requisito número n se cumple en un grado μ_n , ello implica que el *riesgo es preferido* en un grado μ .

Así, para el criterio i -ésimo, podríamos construir una función de pertenencia, $\mu_i(x_i)$ que nos indicaría el grado de intensidad que presenta un asegurado en el criterio i -ésimo. Utilizando una τ -norma, es decir, un operador de agregación "y", para los criterios especificados, y que denominaremos como T, obtendremos el grado en que la póliza debería ser suscrita. Así:

$$\mu = T_{i=1}^n [\mu_i(x_i)]^{\alpha_i}$$

donde α_i ponderaría la importancia del factor i -ésimo en la decisión final. Apuntamos que en (Yager, 1978) se propone una metodología que permite estimar estos factores de ponderación, basada en el concepto de jerarquía analítica de (Saaty, 1978).

A modo de ejemplo, supongamos que una compañía pone como condiciones para aceptar un riesgo en el ramo de automóviles las siguientes:

- El conductor no debe ser ni muy joven ni muy mayor (R1).
- El conductor debe tener experiencia (R2).
- El conductor debe tener un historial de pocos siniestros (R3).
- El coche debe ser seguro (R4)

Asimismo, respecto al concepto de coche seguro, podríamos definirlo como el coche que debe tener poca cilindrada (R5) o tener mucho peso (R6).

En este contexto, podríamos definir el conjunto de los conductores ni jóvenes ni viejos, como aquellos cuya edad oscila entre 40 y 50 años. No obstante, para aquéllos con edades comprendidas entre 30 y 40 años o bien entre 50 y 60, admitiríamos su pertenencia en cierto grado a este conjunto. Así, representaríamos la función de pertenencia respecto al criterio 1, $\mu_1(x_1)$ como se observa en la siguiente ecuación y en la figura 1.

$$\mu_1(x_1) = \begin{cases} \frac{x_1 - 30}{10} & 30 \leq x_1 < 40 \\ 1 & 40 \leq x_1 < 50 \\ \frac{60 - x_1}{10} & 50 \leq x_1 < 60 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

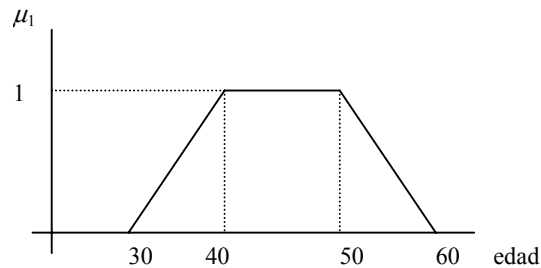


Figura 1

De forma general, y asumiendo la linealidad de las funciones de pertenencia, podemos denotar a $\mu_i(x_i)$ como $([a_i, b_i], l_i, r_i)$, siendo $[a_i, b_i]$ el intervalo de valores que se requieren para el i -ésimo criterio y l_i, r_i las desviaciones a la izquierda y a la derecha que se aceptan como máximo. Así $\mu_1(x_1) = ([40, 50], 10, 10)$.

Supongamos asimismo que R2 se determina según los años de posesión del carnet de conducir, siendo $\mu_2(x_2) = ([5, \infty], 5, 0)$. Respecto a R3, se mide por la suma del valor medio de los siniestros ocasionados por el conductor durante los últimos 5 años (en unidades monetarias), y el cumplimiento de este criterio viene dados por la función de pertenencia $\mu_3(x_3) = [0, 100], 0, 500)$. Por otra parte, R4 vendría dado por la unión de R5 y R6. Así, R5 podría venir dado por la cilindrada como $\mu_5(x_5) = ([0, 1200], 0, 800)$, mientras que R6 por su peso en toneladas, como $\mu_6(x_6) = ([0,8, \infty), 0,3, 0)$.

De forma análoga a la intersección, la unión de subconjuntos borrosos se halla con una τ -conorma, \perp (correspondiente, si se quiere, al operador lógico “o”). Asimismo, los criterios pueden ponderarse en función de la importancia otorgada a cada uno de ellos, con unos coeficientes β_i , que, como mencionamos anteriormente, podrían determinarse utilizando la metodología de las jerarquías analíticas de Saaty. Así, el grado en que se cumple F4, μ_4 , vendrá dado por:

$$\mu_4 = [\mu_5(x_5)]^{\beta_5} \perp [\mu_6(x_6)]^{\beta_6}$$

En el cuadro 1 se ofrece el grado de preferencia de una póliza tomándose iguales ponderaciones para todos los criterios, siendo la τ -norma elegida el mínimo, y la τ -conorma, el máximo.

	Asegurado					Asegurado			
	1	2	3	4		1	2	3	4
Edad	53	43	44	27	μ_1	0,7	1	1	0,13
Años con carnet	20	20	2,5	8	μ_2	1	1	0,5	1
Siniestralidad	0	200	175	50	μ_3	1	0,8	0,85	1
Cilindrada	1600	2000	1000	1900	μ_4	0,67	1	1	0,33
Toneladas	0,7	1	0,5	0,6	μ_5	0,5	0	1	0,13
					μ_6	0,67	1	0	0,33
					μ	0,67	0,8	0,5	0,13

Cuadro 1. Análisis de la idoneidad de los asegurados

Observamos que, mientras el asegurado 2 e incluso el 1, podrían tener, *a priori*, riesgos aceptables, sobre el tomador 3 cabrían fuertes dudas, mientras que para el tomador 4, a la compañía no le quedaría ninguna duda de su no idoneidad, lo que implicaría, o bien, rechazar el riesgo, o bien cobrarle recargos elevados.

3. RECONOCIMIENTO DE GRUPOS DE PÓLIZAS DENTRO DE UN RAMO

La clasificación de un conjunto de pólizas de un ramo en grupos según sus características queda, en muchas ocasiones, mejor captada, si aceptamos que un determinado riesgo puede pertenecer a varios grupos con diferentes intensidades. En este sentido, entendemos que son especialmente interesantes los métodos de agrupación borrosos, que permiten clasificar un conjunto de objetos (pólizas), en diferentes grupos con un nivel de pertenencia predeterminado en cada uno de ellos. En este sentido se manifiestan (Derrig y Ostaszewki (DO), 1995), que proponen el uso del algoritmo de (Bezdek, 1981) para la clasificación de territorios en el ramo del automóvil, determinándose así un “mapa de riesgo”; y para la detección de reclamaciones con indicios de presentar fraude.

Respecto a la identificación de reclamaciones fraudulentas, es obvio que rara vez un asegurador puede establecer si una determinada reclamación es “fraudulenta” o “no fraudulenta”, sino que únicamente existirán, *ex ante*, “muchos indicios” de que sea fraudulenta, “pocos indicios” o “prácticamente ningún indicio”. Así, parece lógico que, en un análisis *ex ante*, no podamos clasificar las reclamaciones de los asegurados en “fraudulentas” o “no

fraudulentas”, sino que todas las reclamaciones pertenecerán a ambos grupos con una intensidad que dependerá de los indicios de fraude que existan.

La idea esencial subyacente en los métodos de agrupación borrosa es similar a los convencionales. Consiste en que, una vez que se ha fijado el número de grupos o “clusters” en los que se desea particionar los datos existentes, los centros de dichos clusters deben permitir minimizar la dispersión dentro de los integrantes del grupo, es decir, constituir grupos homogéneos y, a la vez, maximizar las diferencias entre los grupos.

Sin pretender ser exhaustivos, en un contexto de seguros de riesgo, partiríamos de un conjunto de pólizas $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$, que pueden representarse mediante un vector p -dimensional que sería la plasmación de las diversas variables que se utilizarán para clasificar las pólizas. De forma general, $x_i = (x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(j)}, \dots, x_i^{(p)})$, $i=1,2,\dots,n$. Estos datos de partida deberán ser agrupados en c clusters, $1 < c \leq n$ que denominaremos como $C_1, \dots, C_k, \dots, C_c$, cuyo número está prefijado. Los centros serán los vectores p -dimensionales $v_k = (v_k^{(1)}, \dots, v_k^{(j)}, \dots, v_k^{(p)})$, con $k = 1, 2, \dots, c$. Asimismo, las funciones de pertenencia de los clusters deben presentar las siguientes propiedades:

$$\sum_{k=1}^c \mu_{C_k}(x_i) = 1 \text{ y } 0 \leq \sum_{i=1}^n \mu_{C_k}(x_i) \leq 1$$

Para definir el nivel de pertenencia del i -ésimo elemento al k -ésimo cluster, deberemos utilizar la distancia euclídea, y, asimismo, una

matriz G semidefinida positiva donde se recogerán las ponderaciones que damos a las p variables consideradas en la configuración de los *clusters*. Así, la distancia del i -ésimo elemento al centro del k -ésimo *cluster* vendrá dada por:

$$D_G(x_i, v_k) = \sqrt{(x_i - v_k)^T G (x_i - v_k)}$$

Por otra parte, la pertenencia del i -ésimo elemento al k -ésimo *cluster* será:

$$\mu_{C_k}(x_i) = \frac{\sqrt[m-1]{\frac{1}{[D_G(x_i, v_k)]^2}}}{\sum_{k=1}^c \sqrt[m-1]{\frac{1}{[D_G(x_i, v_k)]^2}}}$$

El centro del k -ésimo *cluster* tendrá como componentes una media ponderada del valor de dichas variables ponderadas por su pertenencia a dicho *cluster*. De forma más concreta,

$$v_k = \frac{\sum_{i=1}^n (\mu_{C_k}(x_i))^m x_i}{\sum_{i=1}^n (\mu_{C_k}(x_i))^m}$$

donde m vendrá dado subjetivamente por el decisor, de tal forma que a medida que m aumente, aumentará la participación de un elemento en la configuración de un determinado *cluster*, y disminuirá su participación en el resto de *clusters*.

Obviamente, si $x_i = v_k$, la expresión anterior no puede utilizarse, siendo en este caso, $\mu_{C_k}(x_i) = 1$, $\mu_{C_s}(x_i) = 0$, $s \neq k$.

Debemos remarcar que no será objeto de la exposición mostrar el procedimiento iterativo que se sigue para determinar los centros de los *clusters*, que puede encontrarse en los mencionados trabajos de Derrig y Ostaszewki, y Bezdeck.

A continuación desarrollamos una aplicación con los datos del cuadro 1 del anexo 1, y que son referentes a un conjunto de pólizas del ramo del automóvil. En concreto, las variables consideradas son la edad, la antigüedad en la compañía, la potencia del vehículo y las reclamaciones por daños materiales en la modalidad de todo riesgo ($p = 4$), el número de *clusters* es $c = 3$ y $m = 2$, mientras que las ponderaciones de los factores vienen dadas por:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

de tal forma que, los centros de los 3 *clusters* son los descritos en el cuadro 2.

	Edad	Años de permanencia	Potencia	Siniestros
Cluster 1	41,15	7,90	72,45	150,42
Cluster 2	30,77	3,13	72,74	330,22
Cluster 3	52,44	6,97	109,60	266,21

Cuadro 2

Así, el primer grupo estaría conformado por las pólizas que generan menos siniestralidad, caracterizadas por pertenecer a conductores

con bastante tiempo de permanencia en la compañía, cercanos a los 40 años y con coches con una potencia relativamente baja. El segundo grupo estaría conformado por conductores más jóvenes, con menos años de permanencia, y serían la pólizas que incorporan mayor riesgo. No obstante, la potencia de los coches es similar a las del primer grupo. Finalmente, en el tercer *cluster* estarían los conductores con mayor edad (y por tanto, dada su mejor situación económica, con coches más potentes), los cuales, generan más siniestralidad que los del grupo 1, lo cual, por otra parte, es comprensible, ya que se trata de coches cuya reparación sea posiblemente más cara. No obstante, puede observarse que su riesgo es inferior a los del grupo 2.

En el cuadro 5 observamos que la póliza 10 presenta una fuerte pertenencia al *cluster* 3 (debido a la edad y la potencia del coche). No obstante, en un grado menor también pertenece al primer grupo (debido posiblemente a que ha producido siniestros de pequeña cuantía). Así, la póliza 17 sería un representante típico del segundo grupo, que, no obstante, pertenece en cierto grado al primer grupo (posiblemente por la potencia del coche). Finalmente, la póliza número 39 pertenece al primer grupo (coches de 70 caballos y que generan poca siniestralidad). No obstante, muestra cierto nivel de pertenencia también al tercer grupo, debido posiblemente a la edad del conductor, que está muy cercana a la edad correspondiente al centro del tercer *cluster*. En el cuadro 2 del anexo 1 se ofrece el resultado final de las agrupaciones realizadas con todos los elementos de la muestra.

i	$(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, x_i^{(4)})$	$\mu_{C_1}(x_i)$	$\mu_{C_2}(x_i)$	$\mu_{C_3}(x_i)$
10	(59, 8, 130, 384,59)	0,11	0,09	0,80
17	(25, 5, 60, 381,74)	0,19	0,75	0,06
39	(63, 12, 70, 5,86)	0,53	0,17	0,30

Cuadro 3

4. DECISIÓN SOBRE LA POLÍTICA DE REASEGURO

Es ampliamente conocido que ningún asegurador mantiene en cartera todos el riesgo que suscribe, sino que cede parte del mismo a un reasegurador, y, mediante sucesivas retrocesiones, las diversas reaseguradoras irán distribuyéndose ese primer riesgo excedente. El principal objetivo de la práctica reaseguradora es asegurar la solvencia de la compañía, ya que permite limitar las pérdidas, es decir, disminuir la probabilidad de ruina. Por otra parte existen tres formas de reaseguro:

- El *reaseguro proporcional*, según el cual, la compañía cede una proporción fija de los siniestros de un ramo o de un conjunto de pólizas al reasegurador.
- El *excess of loss*, con el cual, para cada póliza que integra una parte del negocio concreta, el asegurador asume los siniestros hasta una determinada cuantía (el pleno de retención). Si la indemnización de una determinada póliza es mayor a dicho pleno de retención, el reasegurador asume la diferencia entre el valor del siniestro y el pleno.
- El *stop-loss*, según la cual, para un determinado grupo de pólizas, la reaseguradora se hace cargo del exceso de siniestros acumulados a partir de una cuantía determinada, el pleno.

Por supuesto, la aplicación de una forma u otra de reaseguro, depende, en la práctica, de diversos factores, entre los que podemos mencionar: el tipo de seguro o del ramo, el conocimiento que el reasegurador tenga del cedente, etc.

No vamos a ahondar más en el concepto de reaseguro, y, desde luego, no abordaremos su fundamentación estadística. No obstante, debemos remarcar que, si bien, el reaseguro juega un papel esencial en la administración del asegurador y en su estabilidad, también es cierto que debe ser cuidadoso al determinar la parte del negocio que se cede. Una mayor cesión implica una menor probabilidad de ruina para el asegurador; pero, también limita el crecimiento de la empresa, ya que su negocio disminuye. Es decir, en la decisión de la política de reaseguro existe un *trade-off* entre estabilidad y crecimiento.

En este sentido, (Lemaire, 1990), considera que una forma muy natural de fijar los objetivos y restricciones para determinar la política de reaseguro es mediante subconjuntos borrosos. Por ejemplo, es difícil pensar que el asegurador pretenda una probabilidad de ruina “menor que el X%”, sino que, si existen posibilidades de mantener una mayor parte del negocio en su poder, posiblemente acepte desviaciones positivas sobre ese objetivo con el fin de satisfacer otros criterios orientados, por ejemplo, a la creación de valor para la compañía.

Un instrumento muy adecuado para la toma de decisiones cuando los criterios son expresados de esta forma, es el criterio de decisión en un ambiente borroso de (Bellman y Zadeh, 1970).

En este caso, partimos de una serie de alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (que son las posibilidades de reaseguro que nos ofrece el reasegurador), un conjunto de objetivos, O_1, \dots, O_m , que quedan caracterizados por sus funciones de pertenencia $\mu_{O_1}(x), \dots, \mu_{O_m}(x)$ y unas restricciones, R_1, \dots, R_q , que se expresan también de forma flexible mediante funciones de pertenencia: $\mu_{R_1}(x), \dots, \mu_{R_q}(x)$. En un contexto de decisión borroso no se distingue entre objetivos y restricciones, sino que el espacio de las posibles decisiones, D , surge como intersección entre objetivos y restricciones. Así, como:

$$D = O_1 \cap \dots \cap O_m \cap R_1 \cap \dots \cap R_q$$

el espacio de posibles decisiones a emprender, está dado por una función de pertenencia que podemos denotar como $\mu_D(x)$, y cuya expresión analítica se hallará mediante una norma. Usualmente se utiliza el mínimo, de forma que:

$$\mu_D(x) = \mu_{O_1}(x) \wedge \dots \wedge \mu_{O_m}(x) \wedge \mu_{R_1}(x) \wedge \dots \wedge \mu_{R_q}(x)$$

Por supuesto, siguiendo a (Yager, 1978), un planteamiento mucho más general, que permite introducir en la decisión final la importancia de cada criterio, vendría dado por:

$$\mu_D(x) = [u_{O_1}(x)]^{\alpha_1} T \dots T [u_{O_2}(x)]^{\alpha_2} T [u_{R_1}(x)]^{\beta_1} T \dots T [u_{R_2}(x)]^{\beta_2}$$

Por supuesto, el objetivo final será hallar aquella alternativa que proporcione mayor utilidad al decisor, es decir, aquella que cumpla en mayor grado objetivos y restricciones. De forma más concreta, debe obtenerse:

$$\text{Max}_i \mu_D(x) = [u_{O_1}(x)]^{\alpha_1} T \dots T [u_{O_2}(x)]^{\alpha_2} T [u_{R_1}(x)]^{\beta_1} T \dots T [u_{R_2}(x)]^{\beta_2}$$

En nuestro ejemplo, basado en el propuesto por (Lemaire, 1990) supondremos que la política de reaseguro se fija en base a cuatro criterios que diferenciaremos entre objetivos y restricciones. Para expresar el cumplimiento del criterio i -ésimo, $i = 1, 2, 3, 4$ utilizaremos funciones de pertenencia lineales, análogas a las del apartado 2, que denotaremos como $([a_i, b_i], l_i, r_i)$.

- Criterio 1 (objetivo O_1): Probabilidad de ruina: $([0, 0'0005], 0, 0'0006)$
- Criterio 2 (objetivo O_2): Coeficiente de variación de la cartera retenida: $([0, 2], 0, 1)$.
- Criterio 3 (restricción R_1): Cociente prima del reaseguro/prima total del cedente: $([0, 0'1], 0, 0, 15)$.
- Criterio 4 (restricción R_2): Cociente pleno/prima total del cedente $([0'04, 0'06], 0'02, 0'02)$.

Asimismo, suponemos que los programas que ofrece el reasegurador, tienen las características que se muestran en el cuadro 4.

	1	2	3	4	5	6	7
O_1	0,000999	0,00077	0,000543	0,000421	0,000323	0,000254	0,000199
O_2	2,5	2,25	2,6	1,5	2,45	2,1	1,75
R_1	0,07	0,11	0,13	0,15	0,17	0,2	0,21
R_2	0,032	0,0353	0,044	0,061	0,0625	0,0659	0,0713

Cuadro 4

Los resultados que se obtienen utilizando el operador mínimo y el operador producto, con las ponderaciones $(\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 1)$ y $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \beta_1 = 3, \beta_2 = 1)$ vienen dados en el cuadro 5. Puede observarse que el programa 4 es el que en general parece más satisfactorio. No obstante, en el caso de utilizarse el operador mínimo ponderado, los programas 2 y 3 son preferibles al 4.

Programa	1	2	3	4	5	6	7
μ_{C_1}	0,168	0,550	0,928	1,000	1,000	1,000	1,000
μ_{C_2}	0,500	0,750	0,400	1,000	0,550	0,900	1,000
μ_{R_1}	1,000	0,933	0,800	0,667	0,533	0,333	0,267
μ_{R_2}	0,600	0,765	1,000	0,950	0,875	0,705	0,435
$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 1$							
\wedge	0,168	0,550	0,400	0,667	0,533	0,333	0,267
\times	0,051	0,295	0,297	0,633	0,257	0,212	0,116
$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \beta_1 = 3, \beta_2 = 1$							
\wedge	0,028	0,303	0,400	0,297	0,151	0,037	0,019
\times	0,008	0,141	0,176	0,282	0,073	0,023	0,008

Cuadro 5

5. VALORACIÓN DE SEGUROS DE VIDA

En la valoración financiera de los seguros, existen dos elementos cuya evolución es desconocida, es decir, son “incierto”, si entendemos la incertidumbre en un sentido amplio, pero en los cuales, la naturaleza de su incertidumbre es diferente. En primer lugar encontramos el suceso asegurado, cuyo quebranto económico producido sobre el tomador genera el derecho de la prestación asegurada para el mismo. Usualmente existe experiencia estadística suficiente sobre este fenómeno, por lo que su naturaleza es eminentemente estocástica. En segundo lugar, encontramos el fenómeno financiero y económico inherente a todo el proceso de valoración, el tipo de interés, que se corresponde con la rentabilidad que obtendrá el asegurador con la inversión de las primas; y la evolución de la inflación, que repercute en el aumento del valor nominal de los gastos de funcionamiento del asegurador y de las indemnizaciones a satisfacer. Si bien, numerosos autores utilizan también la estadística para la modelización de estos fenómenos, no creemos que ésta haya solucionado el problema que implica su estimación. Dado que la naturaleza del tipo de interés que puede esperarse en el futuro no es predecible en un sentido “estocástico”, los actuarios, para reflejar la incertidumbre de estos parámetros, usualmente toman uno que estiman como “el más posible” y, posteriormente, realizan análisis de sensibilidad ante variaciones razonables de dicho valor. Como comprobaremos a continuación, la utilización de tipos de interés representados a través de números borrosos ofrece un marco más adecuado para representar la incertidumbre en ellos y, adicionalmente, permite dotar de una

estructura matemática rigurosa al proceso estimativo y valorativo que se sigue en la práctica.

Es posiblemente en el campo de la valoración de los seguros de vida –ver por ejemplo (Lemaire, 1990; Ostaszewki 1993; Terceño, *et al.* 1996; Betzuen, *et al.* 1997; Andrés, *et al.* 2001) donde se ha aplicado de forma más intensiva la utilización de estimaciones borrosas del tipo de interés y la inflación. No obstante, no debemos olvidar su aplicación² en un contexto de valoración financiera de los seguros de no vida, por ejemplo, en los trabajos de (Cummins y Derrig, 1997 y de Derrig y Ostaszewki 1997).

En cualquier caso, es en el campo de los seguros de vida donde el problema de la incertidumbre en la evolución de los tipos de interés futuros se manifiesta con mayor claridad. En este sentido (Prieto, 1993 y Devolder, 1988), consideran que el asegurador de vida, no debe ofrecer nunca un interés que sobrepase el interés libre de riesgo, ya que es el asegurador el que corre con el riesgo de las inversiones. De esta forma, el interés técnico se debe hallar adicionando, al tipo de interés real, una parte de la inflación que el actuario proyecta para el futuro; que dependerá de sus expectativas. Por supuesto, al asegurado se le compensará totalmente, y no sólo de forma parcial, de la depreciación que genera la inflación en los capitales asegurados a través de la figura del *reparto de beneficios*.

Es decir, el tipo de interés técnico, i , a aplicar en la valoración de un contrato en un momento concreto, se halla como $i = r + \lambda\pi$, donde r

es el tipo de interés real, λ la proporción de la inflación proyectada por el actuario que revierte en el asegurado y π es dicha proyección de la inflación. Por supuesto, $0 \leq \lambda < 1$.

En este sentido, remarcamos las siguientes palabras de (Devolder, 1988), que, aunque no sea consciente, conceptualiza el tipo de interés técnico más como un número borroso que como una variable aleatoria o un parámetro cierto: "(...) el tipo de interés real oscila en el largo plazo *alrededor* del 2'5% (...) mientras que la inflación proyectada debe ser *razonable* en el largo plazo". Obsérvese la vaguedad inherente de las palabras "alrededor del 2'5%" y que la inflación "debe ser razonable en el largo plazo", siendo su cuantificación mediante números borrosos muy natural. Así, si utilizamos números borrosos trapezoidales, el interés real podría ser $\tilde{r} = ([r_1, r_2]_b, l_r, r_r)$, mientras que la inflación podría venir dada por $\tilde{\pi} = ([\pi_1, \pi_2]_b, l_\pi, r_\pi)$. De esta forma, una vez el actuario ha determinado la parte de inflación a considerar que ha proyectado, λ , el tipo de interés técnico a aplicar, \tilde{i} , será:

$$\begin{aligned} \tilde{i} &= ([i_1, i_2]_b, l_i, r_i) = \tilde{r} + \lambda \tilde{\pi} = ([r_1, r_2]_b, l_r, r_r) + \lambda \cdot ([\pi_1, \pi_2]_b, l_\pi, r_\pi) = \\ &= ([r_1 + \lambda \pi_1, r_2 + \lambda \pi_2]_b, l_r + \lambda l_\pi, r_r + \lambda r_\pi) \end{aligned}$$

Así, podríamos determinar, a partir de las palabras de Devolder, que $\tilde{r} = ([0'025, 0'03]_b, 0'01, 0'01)$, mientras que una proyección de la inflación en la Unión Europea "razonable en el largo plazo" podría

² Para un extenso análisis de la utilización de valoración financiera en seguros de no vida, puede consultarse (Cummins, 1990)

venir dada por $\pi = ([0'025, 0'035], 0'01, 0'01)$. Así, el tipo de interés técnico para un $\lambda=60\%$, sería

$$\begin{aligned} \tilde{i} &= ([0'025, 0'03], 0'01, 0'01) + 0'6 \cdot ([0'025, 0'035], 0'01, 0'01) = \\ &= ([0,04, 0,051], 0,016, 0,016) \end{aligned}$$

Nuestro análisis se centrará en la valoración financiera de los seguros de vida, y más concretamente, en la determinación de las primas y de las provisiones matemáticas en dos modalidades: en rentas de supervivencia constantes y diferidas con pago de primas periódicas también constantes, estructura que, en cualquier caso, es asimilable a la de un plan de pensiones con prestación diferida, y un seguro de vida mixto pactado a primas únicas que promete, si el asegurado fallece antes del vencimiento, la recuperación de la prima pura revalorizada en una proporción q . El método de valoración aplicado será el principio de equivalencia estático.

El *principio de equivalencia estático* se basa en realizar valoraciones financieras convencionales sobre la esperanza matemática de los capitales (contingentes) que contemplan los contratos. Aplicando este principio, el valor actual de la esperanza matemática de las primas debe coincidir con el valor actual de la esperanza matemática de las prestaciones. Así, si las primas son los capitales financieros contingentes $\{(P_1, t_1); \dots; (P_k, t_k); \dots; (P_n, t_n)\}$, mientras que las prestaciones son $\{(C_1, t_1'); \dots; (C_j, t_j'); \dots; (C_m, t_m')\}$, el equilibrio entre primas y prestaciones vendrá dado por:

$$\sum_{k=1}^n \frac{E(P_k)}{(1+i)^{t_k}} = \sum_{j=1}^m \frac{E(C_j)}{(1+i)^{t_j}}$$

donde $E(\cdot)$ es el operador esperanza matemática.

Por otra parte, la reserva matemática prospectiva en un momento intermedio T del contrato, $T \in [t_1, t_m']$, que denotaremos por R_T , será³:

$$R_T = \sum_{t_j > T} \frac{E_T(C_j)}{(1+i)^{t_j-T}} - \sum_{t_k > T} \frac{E_T(P_k)}{(1+i)^{t_k-T}}$$

Donde $E_i(\cdot)$ es la esperanza matemática condicionada al comportamiento de la mortalidad del asegurado en T años después de la contratación del seguro. De esta forma, para determinar la prima periódica y constante a pagar por parte de un asegurado de edad x , P , para una renta de supervivencia vitalicia con un diferimiento de M años de término C , si suponemos que la periodicidad tanto de las primas como la de las prestaciones es anual, plantearíamos y resolveríamos:

$$P \sum_{k=1}^M (1+i)^{-k+1} {}_{k-1}p_x = C \sum_{j=1}^{\omega-x-M} (1+i)^{-j-M+1} {}_{M+j-1}p_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_M \ddot{a}_x = C_M \ddot{a}_x \Rightarrow P = \frac{C_M \ddot{a}_x}{M \ddot{a}_x} \quad (1)$$

donde ${}_t p_x$ es la probabilidad de que un asegurado de edad x sobreviva a la edad $x+(\cdot)$, y, ω , la primera edad no alcanzable según las tablas de mortalidad utilizadas. Por otra parte, para un seguro mixto pactado a primas únicas, con reembolso de las primas en caso de fallecimiento a una edad intermedia, que se revalorizarán proporcionalmente en un porcentaje q y pactado a primas únicas,

³ Según la legislación de la Unión Europea, es la única forma de cálculo posible para las provisiones matemáticas.

asumiendo que el capital asegurado al final de la vida del contrato es C u.m., la prima se hallará como:

$$P = P(1+q) \sum_{k=1}^n (1+i)^{-k} {}_{k-1|}q_x + C(1+i)^{-n} {}_n p_x \Rightarrow P = P(1+q) {}_n A_x + C {}_n E_x$$

y por tanto,

$$P = \frac{C {}_n E_x}{1 - (1+q) {}_n A_x} \quad (2)$$

Donde ${}_{k-1|}q_x$ denota la probabilidad de que un asegurado de edad x fallezca durante el k -ésimo año del contrato. Así, el cálculo de las provisiones matemáticas T años después de iniciado el contrato, R_T , se determinará en la renta de supervivencia como:

$$R_T = C \sum_{j>T-M} (1+i)^{-j-M+T+1} {}_{M+j-T-1} p_{x+T} - P \sum_{k>T} (1+i)^{-k+T+1} {}_{k-1-T} p_{x+T} \quad (3)$$

mientras que para el seguro mixto con reembolso de primas será:

$$R_T = C(1+i)^{-n+T} {}_{n-T} p_{x+T} + P(1+q) \sum_{k>T} (1+i)^{-k+T} {}_{k-T-1|} q_{x+T} \quad (4)$$

A continuación analizamos el cálculo de estas magnitudes si se utiliza un tipo de interés borroso \tilde{i} , que puede ser notado a través de su función de pertenencia y sus α -cortes como:

$$\tilde{i} = \{x, \mu_{\tilde{i}}(x)\} = \{ \check{v}_\alpha = \{x | \mu_{\tilde{i}}(x) \geq \alpha\} = [i^{-1}(\alpha), i^2(\alpha)] | 0 \leq \alpha \leq 1 \}$$

En el caso en que el tipo de interés venga dado por un número borroso trapezoidal, como es nuestro caso, los α -cortes de \tilde{i} vendrán dados por,

$$i_\alpha = [i^1(\alpha), i^2(\alpha)] = [i_1 - l_i(1-\alpha), i_2 + r_i(1-\alpha)]$$

Para determinar las primas, deberemos evaluar una función del tipo de interés, que denotaremos como $P(i)$, y que en nuestro caso corresponde a las expresiones (1) y (2). Así, las primas de la renta y el seguro mixto analizado (que serán borrosas y que denotaremos como \tilde{P}) serán:

$$\tilde{P} = C \frac{\sum_{j=1}^{\omega-x-M} (1+\tilde{i})^{-j-M+1} {}_{M+j-1}P_x}{\sum_{k=1}^M (1+\tilde{i})^{-k+1} {}_{k-1}P_x} \quad \text{y} \quad \tilde{P} = \frac{C(1+\tilde{i})^{-n} {}_n P_x}{1 - (1+q) \sum_{k=1}^n (1+\tilde{i})^{-k} {}_{k-1}q_x}$$

La obtención de la función de pertenencia de la prima borrosa en cada caso, $\mu_{\tilde{P}}(x)$ necesitará de la aplicación del principio de extensión de Zadeh en la función $P(i)$ que corresponda. Así:

$$\mu_{\tilde{P}}(x) = \max_{x=P(y)} \mu_{\tilde{i}}(y) = \mu_{\tilde{i}}(P^{-1}(x))$$

Sin embargo, en la mayor parte de casos, la aplicación del principio de extensión de Zadeh no es operativa. No obstante, la obtención de una fórmula cerrada para los α -cortes de \tilde{P} , P_α , suele ser posible. Así, siguiendo a (Buckley y Qu, 1990), dado que $dP(i)/di < 0$, se obtiene para las rentas de supervivencia:

$$P_{\alpha} = [P^1(\alpha), P^2(\alpha)] = \left[C \frac{\sum_{j=1}^{\omega-x-M} (1+i^2(\alpha))^{-j-M+1} {}_{M+j-1}p_x}{\sum_{k=1}^M (1+i^2(\alpha))^{-k+1} {}_{k-1}p_x}, C \frac{\sum_{j=1}^{\omega-x-M} (1+i^1(\alpha))^{-j-M+1} {}_{M+j-1}p_x}{\sum_{k=1}^M (1+i^1(\alpha))^{-k+1} {}_{k-1}p_x} \right]$$

mientras que para el seguro mixto pactado a primas únicas, será:

$$P_{\alpha} = [P^1(\alpha), P^2(\alpha)] = \left[C \cdot \frac{(1+i^2(\alpha))^{-n} {}_n p_x}{1-(1+q)\sum_{k=1}^n (1+i^2(\alpha))^{-k} {}_{k-1}q_x}, C \cdot \frac{(1+i^1(\alpha))^{-n} {}_n p_x}{1-(1+q)\sum_{k=1}^n (1+i^1(\alpha))^{-k} {}_{k-1}q_x} \right]$$

Por supuesto, cuando el asegurador ha determinado el valor del contrato, \tilde{P} , debe determinar un valor fijo o nítido para el mismo, P^* . Es decir, se trata de desfuzzyficar \tilde{P} , obtener un valor cierto equivalente, P^* , que podemos asimilar a una medida de posición estadística. En este contexto, (Terceño, *et al.* 1996) proponen la utilización del valor esperado de un número borroso, que para una aversión al riesgo del asegurador $\beta \in [0,1]$ implicaría obtener una prima nítida:

$$P^* = (1-\beta)\int_0^1 P^1(\alpha)d\alpha + \beta\int_0^1 P^2(\alpha)d\alpha$$

De igual forma, podemos obtener la provisión matemática en un diferimiento T , que, en este caso, será también un número borroso \tilde{R}_T , que no admite expresión cerrada de su función de pertenencia. No obstante, dado que la función “valor de las provisiones matemáticas”, $R_T(i)$, es decreciente respecto al tipo de interés de valoración i , sus α -cortes, $R_{T\alpha}$, pueden hallarse evaluando (3) y (4) como:

$$R_{T\alpha} = [R_T^1(\alpha), R_T^2(\alpha)] =$$

$$= \left[C \sum_{j>T-M} (1+i^2(\alpha))^{-j-M+T+1} {}_{M+j-T-1}P_{x+T} - P^* \sum_{k>T} (1+i^2(\alpha))^{-k+T+1} {}_{k-1-T}P_{x+T}, \right.$$

$$\left. C \sum_{j>T-M} (1+i^1(\alpha))^{-j-M+T+1} {}_{M+j-T-1}P_{x+T} - P^* \sum_{k>T} (1+i^1(\alpha))^{-k+T+1} {}_{k-1-T}P_{x+T} \right]$$

$$R_{T\alpha} = [R_T^1(\alpha), R_T^2(\alpha)] =$$

$$= \left[C(1+i^2(\alpha))^{-n+T} {}_{n-T}P_{x+T} + P^*(1+q) \sum_{k>T} (1+i^2(\alpha))^{-k+T} {}_{k-T-1|}q_{x+T}, \right.$$

$$\left. C(1+i^1(\alpha))^{-n+T} {}_{n-T}P_{x+T} + P^*(1+q) \sum_{k>T} (1+i^1(\alpha))^{-k+T} {}_{k-T-1|}q_{x+T} \right]$$

Por supuesto, una vez el asegurador ha determinado el valor del contrato en el momento intermedio, T , \tilde{R}_T , debe determinar un valor fijo o nítido de las provisiones matemáticas, R_T^* , que, por otra parte, sea prudente aunque realista, es decir, sea representativo del valor inferido a través del tipo de interés borroso \tilde{R}_T . Ello puede realizarse sin excesivos problemas a través del valor esperado de \tilde{R}_T , de forma que:

$$R_T^* = (1-\beta) \int_0^1 R_T^1(\alpha) d\alpha + \beta \int_0^1 R_T^2(\alpha) d\alpha$$

A continuación desarrollaremos unas aplicaciones numéricas para mostrar la aplicabilidad de la metodología propuesta. Para ello, supondremos que la cabeza asegurada tiene 45 años ($x = 45$) y que el asegurador estima el tipo de interés técnico como $\tilde{i} = ([0,04,0,051], 0,016, 0,016)$. Las tablas de mortalidad utilizadas son las tablas suizas GMR-82, para población masculina.

En primer lugar, supondremos que el asegurado contrata una renta vitalicia para cubrir la contingencia de jubilación, que se producirá a los 65 años (así, el diferimiento es $M = 20$), y su cuantía es de 1.000 u.m. pagables al principio de año. Los α -cortes de la prima borrosa son:

$$P_\alpha = [P^1(\alpha), P^2(\alpha)] = \left[1000 \cdot \frac{\sum_{j=1}^{41} (1 + 0,051 + 0,016(1 - \alpha))^{-j-20+1} {}_{20+j-1}P_{45}}{\sum_{k=1}^{20} (1 + 0,051 + 0,016(1 - \alpha))^{-k+1} {}_{k-1}P_{45}}, 1000 \cdot \frac{\sum_{j=1}^{41} (1 + 0,04 - 0,016(1 - \alpha))^{-j-20+1} {}_{20+j-1}P_{45}}{\sum_{k=1}^{20} (1 + 0,04 - 0,016(1 - \alpha))^{-k+1} {}_{k-1}P_{45}} \right]$$

Siendo el resultado final, el número borroso de la figura 2. En el cuadro 3 determinamos el valor de las primas ciertas, P^* , para diferentes grados de aversión al riesgo del asegurador β .

β	0	0,25	0,5	0,75	1
P^*	248,13	290,91	333,69	376,47	419,25

Cuadro 3

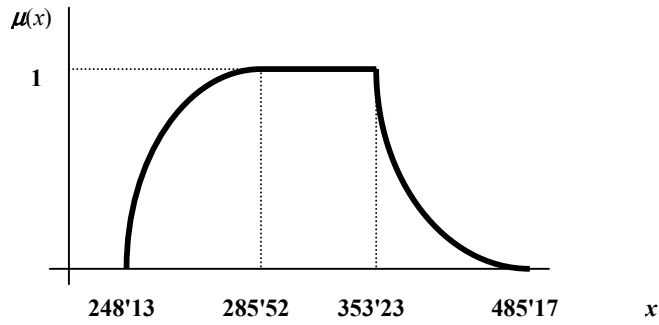


Figura 2

Asimismo, las provisiones matemáticas que deberíamos dotar a los 10 y 20 años de iniciado el contrato se representan en las figuras 3 y 4.

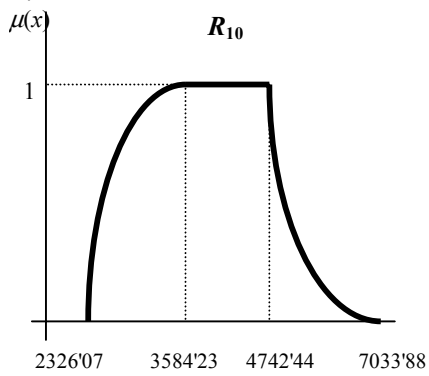


Figura 3

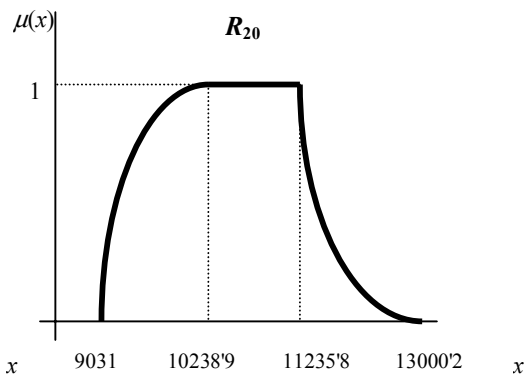


Figura 4

Así, introduciendo la aversión al riesgo del asegurador, el valor final de las provisiones a constituir, R_T^* , es, en cada caso, el que viene en el cuadro 4:

β	0	0,25	0,5	0,75	1
R_{10}^*	2955,15	3688,40	4421,65	5154,91	5888,16
R_{20}^*	9634,96	10255,71	10876,47	11497,23	12117,99

Cuadro 4

A continuación analizamos un seguro mixto inmediato a prima única de duración $n=10$ años, que promete el cobro de la prima revalorizada en un 5% en el caso de fallecimiento durante el horizonte del seguro. En este caso, de la prima borrosa es el número borroso de la figura 5, mientras que sus α -cortes se expresan como:

$$P_\alpha = [P^1(\alpha), P^2(\alpha)] = \left[1000 \cdot \frac{(1 + 0'051 + 0'016(1 - \alpha))^{-10} {}_{10}p_{45}}{1 - 1'05 \sum_{i=1}^{10} (1 + 0'051 + 0'016(1 - \alpha))^{-1} {}_{i-1}q_{45}}, 1000 \cdot \frac{(1 + 0'04 - 0'016(1 - \alpha))^{-10} {}_{10}p_{45}}{1 - 1'05 \sum_{i=1}^{10} (1 + 0'04 - 0'016(1 - \alpha))^{-1} {}_{i-1}q_{45}} \right]$$

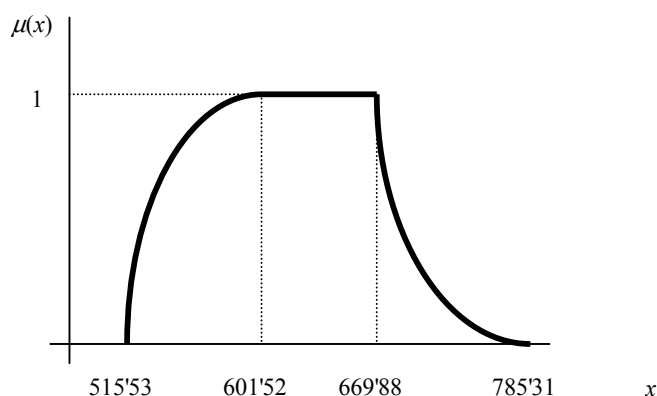


Figura 5

En el cuadro 5 determinamos el valor de las primas ciertas, P^* , para unos grados de aversión al riesgo de asegurador $\beta = 0, 0,25, 0,5, 0,75$ y 1.

β	0	0,25	0,5	0,75	1
P^*	558,53	600,80	643,06	685,33	727,60

Cuadro 5

Asimismo, las provisiones matemáticas que deberíamos dotar en $T = 3$ y $T = 6$, son las que se representan en las figuras 6 y 7. Introduciendo la aversión al riesgo del asegurador, el valor final de las provisiones a constituir, R_t^* es, el que viene en el cuadro 6.

β	0	0,25	0,5	0,75	1
R_{10}^*	666,63	699,22	731,80	764,39	796,98
R_{20}^*	791,34	812,72	834,10	855,49	876,87

Cuadro 6

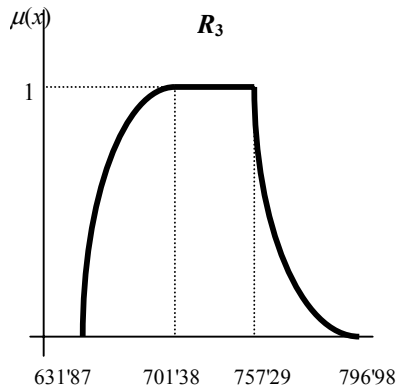


Figura 6

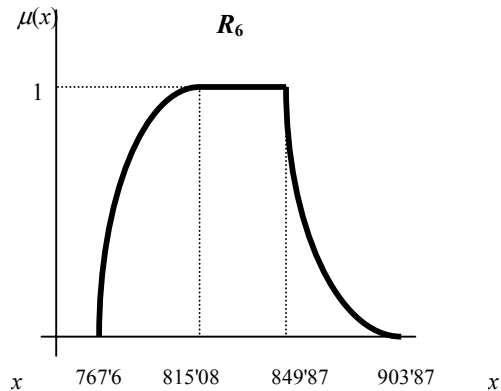


Figura 7

6. CONCLUSIONES

A lo largo del presente trabajo hemos mostrado que, en el campo del análisis actuarial, la teoría de los subconjuntos borrosos permite, dada su alta flexibilidad, modelizar diferentes situaciones donde la información no está lo suficientemente estructurada o tiene un carácter subjetivo, lo cual ocurre en numerosos aspectos de los que abarca la gestión de una compañía aseguradora.

Un conjunto borroso puede interpretarse como un subconjunto construido sobre la base de un prototipo ideal, y que se halla definido dentro de un conjunto referencial, de tal forma que el nivel de pertenencia a dicho subconjunto puede interpretarse como el grado de similitud o proximidad respecto a dicho prototipo. Hemos comprobado que, en este sentido, la utilización de los subconjuntos borrosos permite modelizar cuestiones tan usuales dentro de la práctica aseguradora como el concepto de "riesgo asegurable así como la identificación de "riesgos homogéneos" dentro de un ramo.

Por otra parte, hemos mostrado que un subconjunto borroso puede cuantificar el grado de cumplimiento de un determinado objetivo o restricción que viene dado de forma flexible, de tal forma que el nivel de pertenencia de una determinada alternativa de decisión respecto a un criterio indicaría el cumplimiento de este curso de acción de dicho requerimiento. En este sentido, se ha mostrado que los instrumento de decisión multicriterio borrosos pueden ser de gran utilidad para el decisor, en la determinación de la política óptima de reaseguro, ya que en este caso, se produce un *trade-off* entre dos objetivos: el objetivo de solvencia, que lleva al asegurador a ceder la mayor proporción posible de su cartera, y el objetivo de rendimiento que implica, desde un punto de vista del asegurador, la cesión de la menor parte del negocio posible.

Finalmente, hemos observado que un subconjunto borroso permite cuantificar una estimación subjetiva de una determinada magnitud sobre la que no conocemos su valor futuro, de tal forma que el nivel de presunción otorgado a un elemento indica el grado de creencia

del decisor de que la magnitud tome finalmente dicho valor. Hemos mostrado que en la valoración financiera de los seguros (y más concretamente, en los seguros de vida) el asegurador debe estimar el comportamiento futuro de dos variables, que, en principio, son inciertas: la mortalidad de la cabeza asegurada, y el tipo de interés que se obtendrá invirtiendo las primas. Las características de la información que se dispone de ambas es diferente: respecto a la mortalidad, esta tiene un carácter "duro", pues es probabilizable a partir de una tabla de mortalidad. No obstante, respecto a tipo de interés a aplicar, es bien sabido que, en última instancia, es el actuario (o las autoridades en materia aseguradora, fijando un tipo de interés máximo a aplicar), el que, en base a su experiencia, expectativas, etc. sobre la inflación futura, debe acabar determinando este parámetro. Su estimación mediante un número borroso se adapta de forma evidente a la mentalidad estimativa (basta, si utilizamos números borrosos trapezoidales, con estimar el intervalo que se considera "más posible", y explicitar qué desviaciones sobre éste se estiman razonables), y, como ya fue comentado, dota a la práctica actuarial, basada en la realización de análisis de sensibilidad, de una estructura matemática rigurosa, ya que permite asignar, a cada simulación, no tan sólo su valor, sino un nivel de presunción o de verdad según las expectativas del valuador.

REFERENCIAS

- [1] Bellman, R. E.; Zadeh, L. A. (1970). "Decisión Making in a fuzzy environment", *Management Sciencies* 17, pp. B141-B164.
- [2] Betzuen, A.; Jiménez, M.; Rivas, J. A. (1997). "Actuarial mathematics with fuzzy parameters. An application to collective pension plans". *Fuzzy Economic Review* Vol.2, N° 2. pp. 47-66.
- [3] Bezdek, J. C. (1981). *Pattern Recognition with fuzzy objective function algoritms*. New York: Plenum Press.
- [4] Bowers, N. L.; Gerber, H. U.; Hickman, J. C.; Jones, D. A.; Nesbitt, C. J. (1986). *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries. Itasca.
- [5] Buckley, J. J. (1987). "The fuzzy mathematics of finance". *Fuzzy Sets and Systems* 21. pp. 57-73.
- [6] Buckley, J. J; Qu, Y. (1990). "On using α -cuts to evaluate fuzzy equations". *Fuzzy Sets and Systems* 38. pp. 309-312.
- [7] Busquets, F. (1989). "Elementos matemáticos de reaseguro". *Cuadernos Actuariales* 2. pp. 113-120.
- [8] Cummins, J. D. (1990). "Multi-period discounted cash-flow rate-making modelas in property-liability insurance". *Journal of Risk and Insurance* LVII, 1. pp. 79-109.
- [9] Cummins, J. D.; Derrig, R. A. (1997). "Fuzzy financial pricing of property-liability insurance". *North American Actuarial Journal* 1, 4. pp. 21-44.
- [10] De Andrés, J.; Barberà, G.; Fernández, A.; Terceño, A. (2001). "Analysis of the life insurer's solvency in whole life annuities using fuzzy parameters". *VIII Congreso de la Sociedad Internacional de Gestión de empresas y Economía Fuzzy (SIGEF) celebrado en Nápoles (Italia)*.

- [11] De Wit, G. W. (1982). "Underwriting and uncertainty". *Insurance: Mathematics and Economics* 1. pp. 277-285.
- [12] Derrig, R. A.; Ostaszewski, K. M. (1995). "Fuzzy techniques of pattern recognition in risk and claim classification". *Journal of Risk and Insurance* 62. pp. 447-482.
- [13] Derrig, R. A.; Ostaszewski, K. (1997). "Managing the tax liability of a property liability insurance company". *Journal of Risk and Insurance* 64. pp. 695-711.
- [14] Derrig, R. A. Ostaszewski, K (1998). "Fuzzy sets methodologies in actuarial Science" En: Zimmermann, H.-J. (ed.): *Practical applications of fuzzy technologies*. Massachusetts: Kluwer Academic Publishers. pp. 531-556.
- [15] Devolder, P. (1988). "Le taux d'actualisation en assurance". *The Geneva Papers on Risk and Insurance* 13. pp. 265-272.
- [16] Dubois, D.; Prade, H. (1987). "The mean value of a fuzzy number". *Fuzzy Sets and Systems* 24. pp. 279-300.
- [17] Gil Aluja, J. (1996). "Lances y desventuras del nuevo paradigma de la teoría de la decisión". *Actas del III Congreso de la Sociedad Internacional de Gestión de empresas y Economía Fuzzy (SIGEF) celebrado en Buenos Aires (Argentina)* Vol I. Paper 2.10.
- [18] Gil Aluja, J. (1997). *Invertir en incertidumbre*. Pirámide. Madrid.
- [19] Heilpern, S. (1992). "The expected value of a fuzzy number". *Fuzzy Sets and Systems* 47. p. 81-86.
- [20] Jablonowski, M. (1991). "Fuzzy logic and insurance decisions". *CPCU Journal* September. pp. 181-187.
- [21] Jiménez, M. (1996). "La teoría de la posibilidad aplicada al cálculo financiero en condiciones de incertidumbre". *Actualidad Financiera* 3. pp. 267-276.

- [22] Kaufmann, A. (1986). "Fuzzy subsets applications in O.R. and management". In Jones, A.; Kaufmann, A.; Zimmermann, H.-J. (eds.). *Fuzzy set theory and applications*. Reidel. Dordrecht. pp. 257-300.
- [23] Kaufmann, A.; Gil Aluja, J. (1990). *Las matemáticas del azar y de la incertidumbre*. Ceura. Madrid.
- [24] Lemaire, J. (1990). "Fuzzy insurance". *Astin Bulletin* 20. pp. 33-55.
- [25] Li Calzi, M. (1990). "Towards a general setting for the fuzzy mathematics of finance". *Fuzzy Sets and Systems* 35. pp. 265-280.
- [26] Ostaszewski, K. (1993). *An investigation into possible applications of fuzzy sets methods in actuarial science*. Society of Actuaries. Schaumburg.
- [27] Prieto E. (1993). "Tanto de interés técnico y riesgo del asegurador de vida relacionado con el mismo". *Previsión y Seguro* 31. pp. 37-53.
- [28] Saaty, T. (1978). "Exploring the Interface Between Hierarchies, Multiple Objectives and Fuzzy Sets". *Fuzzy Sets and Systems* 1.
- [29] Terceño, A.; De Andrés, J.; Belvis, C.; Barberá, G. (1996). "Fuzzy methods incorporated to the study of personal insurances". *Fuzzy Economic Review* Vol.1, N° 2. pp. 105-119.
- [30] Yager, R. R. (1978). "Fuzzy decision making including unequal objectives". *Fuzzy Sets and Systems* 1. pp. 87-95.
- [31] Zadeh, L. A. (1965). "Fuzzy sets". *Information and Control* 8. pp. 338-353.
- [32] Zimmermann, H. J. (1991). *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. Kluwer Academic. Dordrecht.

ANEXO 1

En el cuadro 1 presentamos el grupo de pólizas utilizadas en la simulación del apartado 3. Los datos han sido extraídos de <<http://ciberconta.unizar.es/LECCION/visual/INICIO.HTML>>, de Serrano Cinca (2000). Las indemnizaciones han sido obtenidas mediante simulación estocástica, suponiéndose que la cuantía de éstas se distribuían siguiendo una distribución normal truncada en 0 donde la edad y la antigüedad eran positivamente ponderadas (menor siniestralidad) mientras que la potencia del vehículo era negativamente ponderada (mayor siniestralidad).

Póliza	Edad	Antigüedad	Potencia	Indemnización
1	21	6	75	96,29
2	48	10	130	453,74
3	40	12	60	194,98
4	28	5	90	0,00
5	36	10	70	302,98
6	24	1	75	915,54
7	23	5	130	847,83
8	38	2	75	283,58
9	23	6	75	602,74
10	59	8	130	384,59
11	24	1	60	0,00
12	23	10	110	0,00
13	29	1	75	90,74
14	36	10	75	0,00
15	24	1	70	595,31

Póliza	Edad	Antigüedad	Potencia	Indemnización
16	23	10	130	233,65
17	25	5	60	381,74
18	42	8	70	67,10
19	50	2	110	0,00
20	35	5	75	577,51
21	33	2	60	0,00
22	19	3	70	451,78
23	59	15	60	23,20
24	63	12	70	0,00
25	65	5	110	493,67
26	46	5	60	230,04
27	38	1	60	0,00
28	42	4	60	176,55
29	29	1	75	301,02
30	22	2	90	196,53
31	39	1	70	288,74
32	65	5	110	40,64
33	46	5	75	313,00
34	38	2	90	0,00
35	38	1	60	0,00
36	42	4	60	462,58
37	28	5	60	1023,56
38	59	15	70	0,00
39	63	12	70	5,86
40	65	5	110	101,74

Cuadro 1

La aplicación del algoritmo de agrupación borrosa de (Bezdek, 1981), y presuponiendo tres grupos de pólizas, nos lleva a realizar la clasificación del cuadro 2.

Póliza	Cluster 1	Cluster 2	Cluster 3
1	0,39	0,50	0,11
2	0,16	0,13	0,71
3	0,71	0,17	0,12
4	0,42	0,39	0,19
5	0,71	0,19	0,10
6	0,24	0,55	0,21
7	0,27	0,32	0,41
8	0,14	0,80	0,06
9	0,24	0,63	0,14
10	0,11	0,09	0,80
11	0,30	0,58	0,12
12	0,39	0,27	0,34
13	0,23	0,67	0,10
14	0,77	0,13	0,10
15	0,16	0,73	0,10
16	0,29	0,26	0,45
17	0,19	0,75	0,06
18	0,94	0,04	0,02
19	0,24	0,21	0,55
20	0,23	0,64	0,13
21	0,37	0,51	0,11
22	0,14	0,79	0,07
23	0,54	0,20	0,27

24	0,53	0,17	0,30
25	0,16	0,13	0,71
26	0,58	0,32	0,10
27	0,37	0,49	0,13
28	0,49	0,42	0,09
29	0,07	0,90	0,04
30	0,21	0,66	0,13
31	0,16	0,76	0,08
32	0,19	0,12	0,69
33	0,49	0,35	0,16
34	0,36	0,40	0,24
35	0,37	0,49	0,13
36	0,29	0,60	0,11
37	0,29	0,49	0,22
38	0,52	0,18	0,30
39	0,53	0,17	0,30
40	0,16	0,10	0,73

Cuadro 2