Cuadernos del CIMBAGE N° 6 (2003) 75 - 91

SOBRE LA EXTENSIÓN *FUZZY* DEL TEOREMA DE WALRAS

Renato César Scarparo
Universidad Nacional de Rosario
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agronomía
Departamento de Matemática
scarparo@fceia.unr.edu.ar

Recibido 6 de septiembre de 2002; recibido con observaciones 1 de agosto de 2003;
aceptado 25 de septiembre de 2003

Resumen
En este trabajo exponemos una versión de la extensión del Teorema de Walras para multifunciones *fuzzy*.

Palabras Clave: Espacios topológicos fuzzy, multifunciones fuzzy, desigualdades vectoriales cuasivariacionales, punto fijo, teorema de Walras.

Abstract
In this paper we expose one version of the extension of Walras Theorem for fuzzy multifunction .

Keywords: Fixed point; Fuzzy topological spaces; Fuzzy multifunctions; Vector quasivariational inequalities; Walras theorem.

---

1. INTRODUCCIÓN

Presentamos una versión de la extensión del Teorema de Walras para multifunciones *fuzzy* [11].

La importancia del Teorema de Walras [15], fundador de la Escuela de Lausanne, en el estudio de la Economía Competitiva, amerita que sus diferentes versiones y/o extensiones no solo sean tratadas con rigor sino también con claridad didáctica. Es por esa razón que en la exposición que presentamos, hemos puesto énfasis en la claridad del tratamiento, en especial el que concierne al aspecto topológico, a tal respecto cabe señalar la demostración del Teorema 2.1, que es la piedra clave de la demostración del Teorema de Walras para multifunciones *fuzzy*.

Este trabajo requiere un conocimiento elemental de la teoría de espacios topológicos [1, 7], y sobre espacios vectoriales topológicos [3], como así también sobre la temática *fuzzy* [2, 12, 16], en especial sobre multifunciones *fuzzy* [10, 13].

Con el objeto de facilitar una primera lectura a quienes no están familiarizados especialmente con la temática *fuzzy*, explicitamos en este punto algunos conceptos elementales sobre conjuntos *fuzzy* y algunos resultados sobre multifunciones *fuzzy*, que utilizaremos en nuestra exposición.

Por último señalamos que se mantiene la notación standard, tanto para los objetos y relaciones *fuzzy* como para los objetos y relaciones no *fuzzy*.

Definición 1.1. Dado un conjunto X se llama *conjunto fuzzy* (o *borroso*) en X, o también, más propiamente, *subconjunto fuzzy* (o *borroso*) en X, a toda aplicación $A: X \to I$ [1].

Para cada $x \in A$, el valor $A(x)$ se llama el *grado de pertenencia* de x en el conjunto borroso A, y el conjunto $\{x \in A / A(x) > 0\}$, se llama el *soporte* de A y se anota $sopA$.

Definición 1.2. Sean X un conjunto no vacío, K un conjunto de índices y $(A_k)_{k \in K}$ una familia de conjuntos *fuzzy* (borrosos) en X. Entonces se definen respectivamente, la *unión* $\bigcup_{k \in K} A_k$ y la *intersección* $\bigcap_{k \in K} A_k$, mediante las expresiones siguientes:

$$\text{Para todo } x \in X: \ \bigcup_{k \in K} A_k(x) = \sup_{k \in K} A_k(x)$$

$$\text{Para todo } x \in X: \ \bigcap_{k \in K} A_k(x) = \inf_{k \in K} A_k(x)$$

Definición 1.3. Dados un conjunto borroso $A: X \to I$ y un valor $\alpha \in (0;1]$, se llama *α-corte* de A o también *subconjunto de nivel α* - se anota A_α - al subconjunto definido por: $A_\alpha = \{x \in X / A(x) \geq \alpha\}$

Definición 1.4. Sean E e Y, EVTH (espacios vectoriales topológicos de Hausdorff) sobre $\Re$, X un subconjunto de E, no vacío y convexo, K un *cono convexo* en Y, $K \neq Y$ y $M: X \to 2^Y$, una multifunción. Entonces:

1.4.1. M es *K-convexa* sii:

---

[1] $I = [0,1]$

$$\forall\, x_1, x_2 \in X\,,\quad \forall\, \lambda \in I\,,\ \lambda M(x_1) + (1-\lambda) M(x_2) \subset M(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) + K$$

1.4.2. M es *K-cuasiconvexa* sii:

$\forall\, a \in Y$, el conjunto $\{x \in X \,/\, a \in M(x) + K\}$ es convexo.

Definición 1.5. Sea $\xi : Y \to \Re$ una aplicación con dominio en un EVTH sobre $\Re$. Se dice que:

1.5.1. ξ es *monótona creciente* respecto a un cono convexo K en Y si :

$$a \in b + K \;\Rightarrow\; \xi(a) \geq \xi(b).$$

1.5.2. ξ es *estrictamente monótona creciente* respecto a un cono convexo K en Y si:

$$a \in b + K \;\Rightarrow\; \xi(a) > \xi(b).$$

Definición 1.6. Dados dos conjuntos X e Y, se llama *multifunción fuzzy* de X en Y a toda aplicación $M : X \to I^Y$.

En lo que sigue dada una multifunción *fuzzy* $M : X \to I^Y$, para todo $x \in X$ el conjunto *fuzzy* $M(x)$ se anotará frecuentemente con M_x.

Definición 1.7. Una multifunción *fuzzy* $M : X \to I^Y$ de un conjunto X en un subconjunto Y, de un EVTH Z sobre $\Re$ se dice *convexa* sii:

Y es convexo y $\forall\, x \in X$, $y, z \in Y$, $\lambda \in [0;1]$ resulta:

$$M_x(\lambda y + (1-\lambda) z) \geq m\acute{\imath}n\{M_x(y), M_x(z)\}$$

Definición 1.8. Un conjunto *fuzzy* A, definido en un espacio topológico X se dice *compacto* sii para cada $\alpha \in (0;1]$ el corte A_α es un subconjunto compacto de X.

Definición 1.9. Dada una multifunción *fuzzy* $M: X \to I^Y$ de un espacio topológico X en un espacio topológico Y se dice que:

1.9.1. M es *topológicamente abierta* sii:

Para cada $x_0 \in X$ y para cada subconjunto abierto V de Y que admite la existencia de un punto $y \in V$ y un valor $\gamma \in (0;1]$ tales que: $M_{x_0}(y) \geq \gamma$, existe un entorno U de x_0, tal que para cada $x \in U$ existe un punto $y' \in V$ tal que $M_X(y') \geq \gamma$.

1.9.2. M es *topológicamente cerrada* sii:

Para cada $x_0 \in X$ para cada $\gamma \in (0;1]$ y para cada subconjunto abierto V de Y que verifica $M_{x_0}(y) \geq \gamma \Rightarrow y' \in V$ existe un entorno U del punto x_0 tal que para cada $x \in U$: si $M_X(y) \geq \gamma \Rightarrow y \in V$.

1.9.3. M es *continua* sii:

M es topológicamente abierta y topológicamente cerrada.

1.9.4. M es *cerrada* sii:

La función de $X \times Y$ en I definida por la asignación $(x; y) \to M_x(y)$ es semicontinua superiormente (s.c.s.).

Lema 1.10. (Lema de Chan) [11][13]. Sean X un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de un espacio vectorial topológico E sobre $\Re$, C un subconjunto convexo y no vacío de un espacio vectorial topológico Z sobre $\Re$ y $\alpha: X \to (0;1]$ una función s.c.i. Si $F: X \to I^C$ es una multifunción *fuzzy* tal que para cada $x \in X$, $(F_x)_{\alpha(x)} \neq \varnothing$ y si $F^{\sim}: X \to 2^C$ es la multifunción definida por $F^{\sim}(x) = (F_x)_{\alpha(x)}$, se tiene que:

1.10.1. Si F es una multifunción *fuzzy* convexa entonces $F^{\sim}$ es una multifunción a valores convexos.

1.10.2. Si F es una multifunción *fuzzy* cerrada y convexa, entonces $F^{\sim}$ es una multifunción cerrada a valores cerrados y convexos.

Teorema 1.11. Sean: X e Y dos espacios topológicos, $\gamma \in (0;1]$ y una multifunción *fuzzy* $F : X \to I^Y$ tal que para cada $x \in X$ $(F_x)_y \neq \varnothing$. Si $F^{\sim} : X \to 2^Y$ es la multifunción definida por $F^{\sim}(x) = (F_x)_y$, valen las siguientes propiedades:

1.11.1. Si F es topológicamente abierta entonces $F^{\sim}$ es semicontinua inferiormente (s.c.i.).

1.11.2. Si F es topológicamente cerrada entonces $F^{\sim}$ es semicontinua superiormente (s.c.s.).

1.11.3. Si F es continua entonces $F^{\sim}$ es continua.

Teorema 1.12. (Kakutani - Fan - Glickberg) Sea K un subconjunto compacto y convexo de un espacio vectorial topológico localmente convexo de Hausdorff E. Si T una multifunción s.c.s. de K en 2^K y para todo $x \in K$, $T(x)$ es no vacío, cerrado y convexo, entonces existe un punto $x_0 \in K$ tal que $x_0 \in T(x)$.

2. DESIGUALDAD VECTORIAL CUASIVARIACIONAL PARA APLICACIONES *FUZZY*.

En este punto se expone un teorema de existencia con respecto a desigualdades vectoriales cuasivariacionales para aplicaciones *fuzzy*, aplicando el teorema de punto fijo de Kakutani - Fan-Glicksberg, [4, 5, 6, 14].

Teorema 2.1. Sean E, F dos EVTLCH (espacios vectoriales topológicos localmente convexos de Hausdorff) sobre $\Re$, X un subconjunto de E no vacío compacto y convexo; C un subconjunto de F no vacío compacto y convexo e Y un EVTH sobre $\Re$ dotado con un cono convexo K puntuado. Sean además una multifunción *fuzzy* continua y convexa $S : X \to I^X$ tal que para todo $x \in X$, S_x es un conjunto *fuzzy* compacto en X, una multifunción *fuzzy* cerrada y convexa $T : X \to I^X$, y una multifunción *fuzzy* continua $G : X \times C \times X \to I^X$ tal que para todo $(x, y, u) \in X \times C \times X$, $G_{(x,y,u)}$ es un conjunto *fuzzy* compacto en Y. Si:

2.1.1. Existe una función semicontinua inferiormente $\alpha : X \to (0;1]$ y dos valores $\beta, \gamma \in (0;1]$ tales que para cada $x \in X$ los conjuntos de nivel $(S_x)_\beta$ y $(T_x)_{\alpha(x)}$ son respectivamente no vacíos y para todo $(x, y, u) \in X \times C \times X$ el conjunto $G_{(x,y,u)_\gamma}$ es no vacío.

2.1.2. Para todo $(x, y) \in X \times C$, $G_{(x,y,u)_\gamma} \subset K$.

2.1.3. Existe una función $\xi : Y \to \Re$ continua y estrictamente monótona creciente con respecto al cono K tal que para cada $(x, y) \in X \times C$ la multifunción definida por; $u \to \xi\left(G_{(x,y,u)_\gamma}\right)$ es $\Re^+$-cuasiconvexa.

Entonces existe $x^* \in X$ tal que $x^* \in \left(S_{x^*}\right)_\beta$ y existe $y^* \in \left(T_{x^*}\right)_{\alpha\left(x^*\right)}$ tal que para todo $x \in \left(S_{x^*}\right)_\beta$ y para todo $z \in G_{\left(x^*, y^*, x\right)_\gamma}$, $z \notin K - \{0\}$.

Demostración:

Sean las multifunciones:

$S^{\sim}: X \to 2^X$ tal que para cada $x \in X$, $S^{\sim}(x) = (S_x)_\beta$

$T^{\sim}: X \to 2^X$ tal que para cada $x \in X$, $T^{\sim}(x) = (T_x)_{\alpha(x)}$

$G^{\sim}: X \times C \times X \to 2^Y$ tal que para cada $x \in X$, $G^{\sim}(x, y, u) = \left(G_{(x,y,u)}\right)_{\gamma *}$

Entonces:

(1) $S^{\sim}$ está bien definida en virtud de 2.1.1., además es a valores, compactos por la definición de la multifunción *fuzzy* S y convexos por el Lema 1.10, (Lema de Chang).

(2) $T^{\sim}$ esta bien definida por 2.1.1. Además como T es una multifunción *fuzzy* cerrada convexa y conjuntamente con los datos E, F, X, C, α de nuestra hipótesis, verifican la hipótesis del Lema 1.10. (Chang), resulta en virtud del punto ii) de dicho lema, que la multifunción $T^{\sim}: X \to 2^X$ es cerrada, a valores no vacíos, cerrados y convexos. Más aún como para todo x, $T^{\sim}(x)$ está contenido en el compacto C, $T^{\sim}(x)$ es un subconjunto compacto.

Recapitulando, $T^{\sim}$ es una multifunción cerrada a valores no vacíos, cerrados y compactos.

(3) Como $G: X \times C \times X \to I^X$ es una multifunción *fuzzy* continua, vale decir topológicamente abierta y cerrada, por [13] Lema 2.4., la multifunción $G^{\sim}: X \times C \times X \to 2^Y$ es continua. Además por hipótesis $\xi: Y \to \Re$ es una función continua y para todo $(x, y, u) \in X \times C \times X$, $G_{(x,y,u))}$ es un conjunto *fuzzy* compacto en Y, por lo tanto $\left(G_{(x,y,u)}\right)_\gamma$ es

compacto y en consecuencia $\xi G^{\sim}$ es una multifunción continua a valores no vacíos y compactos.

Sea la función:

$M : X \times C \to \Re$ tal que $\forall\,(x,y) \in X \times C$, $M(x,y) = mín\{r \in \xi G^{\sim}(x,y,s) / s \in S^{\sim}(x)\}$

Demostraremos que la aplicación M es continua.

Si consideramos la multifunción:

$L : X \times C \to X \times C \times X$ definida por $L(x,y) = (x,y,S^{\sim}(x))$,

tenemos que $\xi G^{\sim}(L(x,y)) = \xi G^{\sim}(x,y,S^{\sim}(x))$.

Entonces $\xi G^{\sim}(L(x,y)) = \bigcup_{s \in S^{\sim}(x)} \xi G^{\sim}(x,y,s)$

Como L y $\xi G^{\sim}$ son multifunciones continuas, $\xi G^{\sim} \circ L$ es una multifunción continua. Además como $(x,y,S^{\sim}(x))$ es compacto, el conjunto $\xi G(x,y,S^{\sim}(x))$ es compacto y por lo tanto la multifunción definida por $(x,y) \to mín\{\xi G^{\sim}(x,y,S^{\sim}(x))\}$ es continua. Eso significa que M es continua.

Sea la multifunción:

$V : X \times C \to 2^{X}$ definida por $V(x,y) = \{u \in S^{\sim}(x) / M(x,y) \in \xi G^{\sim}(x,y,u)\}$.

Como $\xi G^{\sim}(x,y,S^{\sim}(x))$ es un conjunto compacto, existe un valor $u \in S^{\sim}(x)$ que efectiviza el valor $M(x,y)$, por lo tanto la multifunción V está bien definida.

Sea la multifunción:

$V' : X \times C \to 2^{X}$ definida por $V'(x,y) = \{u \in \Re / M(x,y) \in \xi G^{\sim}(x,y,u)\}$.

Tenemos que $V(x,y) = V'(x,y) \cap S^{\sim}(x)$.

Por lo tanto,

$$Graf\ V = \{(x,y,u) \in X \times C \times X / M(x,y) \in \xi G^{\sim}(x,y,u), u \in S^{\sim}(x)\}$$

Por consiguiente el complemento de $Graf\ V$ esta dado por:

$$\{(x,y,u) \in X \times C \times X / M(x,y) \notin \xi G^{\sim}(x,y,u)\} \cup \{(x,y,u) \in X \times C \times X / u \notin S^{\sim}(x)\}.$$

Como $S^{\sim}(x)$ es una parte compacta de un espacio de Hausdorff, es un cerrado y por lo tanto el conjunto $\{(x,y,u) \in X \times C \times X / u \notin S^{\sim}(x)\}$ es un subconjunto abierto en $X \times C \times X$.

Sólo resta demostrar que el complemento de $Graf\ V'$ ($(Graf\ V')^c$) es abierto.

Sea $(x,y,u) \notin Graf\ V'$, vale decir tal que, $M(x,y) \notin \xi G^{\sim}(x,y,u)$.

Como $\xi G^{\sim}(x,y,u)$ es compacto, existen un entorno U de $M(x,y)$ y un entorno W de $\xi G^{\sim}(x,y,u)$ tales que $U \cap W \neq \varnothing$. Además como M es una aplicación continua existen sendos entornos U_1, U_2, U_3 de x, y, u , tales que para todo $x' \in U$, para todo $y' \in U$ y para todo $u' \in U$, $M(x',y') \in U$ y $\xi G^{\sim}(x',y',u') \subset W$.

Por lo tanto para todo $(x',y',u') \in U_1 \times U_2 \times U_3$ se tiene que $M(x,y) \notin \xi G^{\sim}(x',y',u')$. O sea que $U_1 \times U_2 \times U_3 \subset (Graf\ V')^c$.

Por consiguiente, $Graf\ V$ es un cerrado.

Ahora demostraremos que V es una multifunción a valores convexos.

Sean $u_1, u_2 \in V(x,y)$ y $\lambda \in [0;1]$. Como la multifunción $S^{\sim}$ toma valores convexos, se tiene que $\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \in S^{\sim}(x)$

Como por 2.1.3. para cada $(x, y) \in X \times C$ la multifunción definida por la asignación, $u \to \xi G^{\sim}(x, y, u)$ es $\Re^{+}$-cuasiconvexa, tenemos que el conjunto $A = \{u \in X / M(x, y) \in \xi G^{\sim}(x, y, u) + \Re^{+}\}$ es convexo.

Es decir que si $t_0 = M(x, y)$, entonces $A = \{u \in X / \exists t \in \xi G^{\sim}(x, y, u), t_0 \in t + \Re^{+}\}$.

O sea que $A = \{u \in X / \exists t \in \xi G^{\sim}(x, y, u), t \leq t_0\}$ es convexo.

Como $u_1, u_2 \in A$, entonces $\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \in A$.

Por lo tanto existe $t \in \xi G^{\sim}(x, y, \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2)$ tal que $t \leq t_0$ o sea $t_0 \in \xi G^{\sim}(x, y, \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2)$.

Luego $\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \in V(x, y)$ y $V(x, y)$es convexo.

Sea la multifunción:

$W : X \times C \to 2^{X \times C}$ definida por $W(x, y) = V(x, y) \times T^{\sim}(x)$

Como $V(x,y)$ y $T^{\sim}(x)$ son convexos y cerrados, $W(x,y)$es convexo y cerrado, además como $T^{\sim}$ es s.c.s., W es s.c.s.

Como consecuencia del teorema del punto fijo de Kakutani-Fan-Glicksberg [5] existe $(x^*, y^*) \in X \times C$ tal que $(x^*, y^*) \in W(x^*, y^*)$.

Por lo tanto

$$x^* \in S^{\sim}(x^*),\ M(x^*, y^*) \in \xi G^{\sim}(x^*, y^*, x^*) \text{ e } y^* \in T^{\sim}(x)$$

Luego existe $z^* \in G^{\sim}(x^*, y^*, x^*)$ tal que $\xi(z^*) = M(x^*, y^*)$

Como ξ es estrictamente monótona creciente con respecto al cono K, tenemos que:

$$\text{Para todo } s \in S^{\sim}(x^*),\ \text{para todo } z \in G^{\sim}(x^*, y^*, x^*);\ \xi(z^*) \leq \xi(z)$$

O sea que $\xi(z^*)$ no es mayor que $\xi(z)$, lo cual implica que $(z^* - z) \notin K - \{0\}$ o sea que $(z - z^*) \notin K - \{0\}$

Finalmente probaremos que $z \notin K - \{0\}$

Supongamos lo contrario, vale decir que el punto $z \in K - \{0\}$.

Como $z \in G^{\sim}(x^*, y^*, x^*)$, por el punto 2.1.2., tenemos que $z^* \in K$. Dado que K es puntuado se tiene que $(z^* - z) \in (-(K - \{0\}) - K) = -(K - \{0\})$, lo cual es contradictorio. Por lo tanto $z \notin K - \{0\}$. En consecuencia existen $x^* \in S^{\sim}(x^*)$ (donde $S^{\sim}(x^*) = (S_{x^*})_{\beta}$ e $y^* \in T^{\sim}(x)$ (donde $T^{\sim}(x^*) = (T_{x^*})_{\alpha(x^*)}$)

tales que para todo $x \in (S_{x^*})_{\beta}$, y para todo $z \in G^{\sim}(x^*, y^*, x^*)_{\gamma}$, $z \notin K - \{0\}$.

3- TEOREMA DE WALRAS PARA MULTIFUNCIONES *FUZZY*.

Teorema 3.1. Sean E, F dos EVTLCH sobre $\Re$, X un subconjunto de E no vacío compacto y convexo; C un subconjunto de F no vacío compacto y convexo e Y un EVTH sobre $\Re$ dotado de un cono convexo K puntuado. Sean además una multifunción *fuzzy* cerrada y convexa $T : X \to I^X$ y una multifunción *fuzzy* continua $G : X \times C \to I^Y$, tal que para todo $(x, y) \in X \times C$, $G_{(x,y)}$ es un conjunto *fuzzy* compacto en Y. Si:

3.1.1. Existen una función semicontinua inferiormente; $\alpha : X \to (0;1]$ y un valor $\gamma \in (0;1]$ tales que para cada $x \in X$, los conjuntos de nivel $(T_x)_{\alpha(x)}$ son no vacíos y para todo $(x, y) \in X \times C$, el conjunto $(G_{(x,y)})_{\gamma}$ es no vacío

3.1.2. Para todo $x \in X$; $(G_{(x,y)})_{\gamma} \subset K + a$ donde $y \in (T_x)_{\alpha(x)}$, $a \in Y$.

3.1.3. Existe una función $\xi : Y \to \Re$ continua y estrictamente monótona creciente con respecto al cono K, tal que para cada $y \in C$, la multifunción definida por $x \to \xi(G_{(x,y)})_{\gamma}$ es $\Re^+$-cuasiconvexa.

Entonces existen $x^* \in X$ e $y \in (T_x)_{\alpha(x)}$ tales que para todo $x \in X$ y para todo $z \in \left(G_{\left(x,y^*\right)} \right)_\gamma$, $z - a \notin K - \{0\}$.

Demostración:

Sean las multifunciones

$T^{\sim!} : X \to 2^C$ tal que para cada $x \in X$, $T^{\sim}(x) = (T_x)_{\alpha(x)}$.

$G^{\sim!} : X \times C \to 2^Y$ tal que para cada $(x, y) \in X \times C$, $G^{\sim}(x, y) = \left(G_{(x,y)}\right)_\gamma$.

$V : C \to 2^X$ tal que para cada $x \in X$,

$V(y) = \left\{ x \in X / S^{\sim}(x) / \underset{u \in X}{mín} \xi G^{\sim}(u, y) \in \xi G^{\sim}(x, y) \right\}$.

Mediante una demostración análoga a la del Teorema 2.1, se prueba que las multifunciones $T^{\sim}$ y V , son semicontinuas superiormente, a valores compactos y convexos.

Sea $J : X \times C \to 2^{X \times C}$ tal que para cada $(x, y) \in X \times C$, $J(x, y) = V(y) \times T^{\sim}(x)$

J es una multifunción semicontinua superiormente, a valores compactos y convexos.

Por el teorema de punto fijo de Kakutani - Fan - Glickberg, existe $\left(x^*, y^*\right) \in X \times C$ tal que $\left(x^*, y^*\right) \in V\left(y^*\right) \times T^*\left(x^*\right)$.

Por lo tanto existen $x^* \in V\left(y^*\right)$ e $y^* \in T^*\left(x^*\right)$ tales que $\underset{u \in X}{mín}\left(\xi G^{\sim}\left(u, y^*\right)\right) \in \xi G^{\sim}\left(x^*, y^*\right)$.

En consecuencia:

Para todo $x \in X$ y para todo $z \in G^{\sim}\left(u, y^*\right)$, $\left(z - z^*\right) \notin -(K - \{0\})$

Se deduce que $z-a\notin K-\{0\}$.

En efecto si suponemos que $z-a\in-(K-\{0\})$, como $z^*\in G^{\sim}(u^*,y^*)$ en virtud de 3.1.2., se tiene que $z^*-a\in K$ y puesto que K es puntuado, se tiene que $z-z^*=(z-a)-(z^*-a)$ y $(z-a)-(z^*-a)\in-(K-\{0\})+(-K)$, o sea $z-z^*\in-(K-\{0\})$, lo cual obviamente contradice la hipótesis. Luego existen $x^*\in X$ e $y^*\in(T_x)_{\alpha(x)}$ tales que para todo $x\in X$ y para todo $z\in\left(G_{(x,y^*)}\right)_\gamma$, $z-a\notin-(K-\{0\})$ lo cual finaliza la demostración.

Corolario 3.2. Sean E,F dos EVTLCH sobre $\Re$, X un subconjunto de E no vacío compacto y convexo; C un subconjunto de F no vacío compacto y convexo e Y un EVTH sobre $\Re$ dotado de un cono convexo K puntuado tal que $K-\{0\}$ es abierto. Sean además una multifunción *fuzzy* cerrada y convexa $T:X\to I^C$ y una multifunción *fuzzy* continua $G:X\times C\to I^Y$, tal que para todo $(x,y)\in X\times C$, $G_{(x,y)}$ es un conjunto *fuzzy* compacto en Y. Si:

3.2.1. Existen una función semicontinua inferiormente $\alpha:X\to(0;1]$ y un valor $\gamma\in(0;1]$ tales que para cada $x\in X$ los conjuntos de nivel $(T_x)_{\alpha(x)}$ son no vacíos y para todo $(x,y)\in X\times C$ el conjunto de nivel $\left(G_{(x,y)}\right)_\gamma$ es no vacío.

3.2.2. Para todo $x\in X$ $\left(G_{(x,y)}\right)_\gamma\subset K+a$, donde $y\in(T_x)_{\alpha(x)}$ y $a\in Y$.

3.2.3. Para cada punto fijo $y\in C$, la multifunción definida por $x\to\xi\left(G_{(x,y)}\right)_\gamma$ es K-cuasiconvexa.

Entonces existen $x^* \in X$ e $y^* \in \left(T_{x^*}\right)_{\alpha\left(x^*\right)}$ tales que para todo $x \in X$ y para todo $z \in \left(G_{\left(x,y^*\right)}\right)_{\gamma}$, $z - a \notin K - \{0\}$.

Demostración:
Es consecuencia del Lema 2.2. y del Teorema 3.1.

Corolario 3.3. Sean E,F dos EVTLCH sobre $\Re$, X un subconjunto de E no vacío compacto y convexo y C un subconjunto de F, no vacío compacto y convexo. Sean una multifunción *fuzzy* cerrada y convexa $T : X \to I^C$ y una función continua $\varphi : X \times C \to \Re$. Si:

3.3.1. Existe una función semicontinua inferiormente $\alpha : X \to (0;1]$ tal que para cada $x \in X$ el conjunto de nivel $(T_x)_{\alpha(x)}$ es no vacío.

3.3.2. Para todo $x \in X$, para todo $y \in (T_x)_{\alpha(x)}$ y para algún valor $a \in \Re$, $\varphi(x, y) \geq a$.

3.3.3. Para cada punto fijo $y \in C$, la función definida por la asignación $x \to \varphi(x, y)$ es cuasiconvexa.

Entonces existen $x^* \in X$ e $y^* \in \left(T_{x^*}\right)_{\alpha\left(x^*\right)}$ tales que para todo $x \in X$, $\varphi\left(x, y^*\right) \geq a$.

Demostración: Trivial.

Reconocimiento. *El autor agradece a los evaluadores sus valiosas sugerencias.*

REFERENCIAS

[1] Berge C. (1966). *Espaces topologiques, fonctions multivoques*. Dunod, París.

[2] Dubois D., Prade H. (1991). *An Introduction to Fuzzy Logic Applications in Intelligent Systems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

[3] Bourbaki N. (1966). *Espaces vectoriels topologiques*, chapitres 1 et 2, Hermann, París.

[4] Fan K. (1952). Fixed point and minimax theorems in locally convex linear spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 38*, 121-126.

[5] Glicksberg I. L. (1952). A further generalization of the Kakutani fixed point theorem with application to Nash equilibrium points, *Proc. Amer. Math. Soc. 3,* 170-174.

[6] Kakutani S. (1941). A generalization of Brouwer´s fixed point theorem. *Duke Math. J. 8*, 457-459.

[7] Kelley J. L. (1963). *Topología General*, Eudeba, Buenos Aires.

[8] Luc D. T. , Vargas C. (1989). Theory of Vector Optimization. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Vol 319, Springer, Berlín.

[9] Luc D. T., Vargas C.(1992). A saddle point theorem for set-valued maps. *Nonlinear Anal, Throry Methods Appl. 18*, 1-7.

[10] Papageorgiou N. S. (1985). Fuzzy topology and fuzzy multifunctions, *J. Math. Anal. Appl 109*, 397-425.

[11] Chang S. S., Lee G. M., Lee B. S. (1997). Vector quasivariational inequalities for fuzzy mappings I. *Fuzzy Sets and Systems 87*, 307-315.

[12] Scarparo R. C. (1999). Elementos de espacios topológicos borrosos, *Cuadernos del CIMBAGE Nº 2,* Buenos. Aires.

[13] Scarparo R. C. (2000). Sobre Multifunciones *Fuzzy*, *Cuadernos del CIMBAGE Nº 5*, Buenos. Aires.

[14] Trafdar E., Husain T. (1978). Duality in Fixed Point Theory of Multivalued Mappings with Applications. *Journal of Math. Anal. and Applic. Vol 63*, 371-376.

[15] Walras (1874). *Eléments d'Economie Politique Pure*, 4th Edition, Librairie de Droit et de Jurisprudence, Paris.

[16] Zadeh L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control 8*.