Cuadernos del CIMBAGE N°7 (2005) 127-149

SELECCIÓN ENDÓGENA DE EXPERTOS

Rocío de Andrés Calle[1], José Luis García Lapresta[2]
[1] Departamento de Fundamentos del Análisis Económico e Historia e Instituciones Económicas, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Valladolid.
Avda. Valle de Esgueva 6
47011 – Valladolid - España
rocioac@eco.uva.es
[2] Departamento de Economía Aplicada, S. de Matemáticas, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Valladolid.
Avda. Valle de Esgueva 6
47011 – Valladolid - España
lapresta@eco.uva.es

Recibido 18 de noviembre de 2004, recibido con observaciones 13 de diciembre de 2004, aceptado 7 de febrero de 2005.

Resumen

El problema de la cualificación e identificación de los individuos pertenecientes a un grupo es uno de los más recientes problemas abordados desde la Teoría de la Elección Social. En este trabajo hemos tratado un problema similar: el de la selección endógena de un grupo de expertos dentro de un colectivo a partir de las opiniones de cada individuo sobre el resto de los agentes y de la que cada agente tiene sobre sí mismo. Hemos supuesto que los individuos gradúan sus valoraciones en el intervalo unidad y que a través de ellas se obtiene una valoración colectiva para cada uno de los posibles expertos. Para agregar las opiniones individuales en una valoración colectiva sobre cada uno de los posibles expertos se ha utilizado una clase de medias cuasiaritméticas ponderadas. Hemos considerado reglas de decisión que, a partir de las valoraciones colectivas, permiten seleccionar los expertos en función de diferentes niveles de cualificación. En el trabajo se demuestran las principales propiedades de las reglas de decisión propuestas.

Palabras clave: *toma de decisiones colectivas, selección de individuos, valoraciones difusas, medias cuasiaritméticas ponderadas.*

ENDOGENOUS EXPERTS' SELECTION

Rocío de Andrés Calle[1], José Luis García Lapresta[2]
[1] Departamento de Fundamentos, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Valladolid.
Avda. Valle de Esgueva 6
47011 – Valladolid - España
rocioac@eco.uva.es
[2] Departamento de Economía Aplicada (S. de Matemáticas, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Valladolid.
Avda. Valle de Esgueva 6
47011 – Valladolid - España
lapresta@eco.uva.es

Received 18 November 2004, received in revised form 13 December 2004, accepted 7 February 2005.

Abstract

The problem of qualification and identification of individuals belonging to a group is one of the most recent problems analyzed in the Social Choice Theory. In this paper we deal with a similar problem: the endogenous selection of experts in a group taking into account the opinions of each individual over every member of the group, including himself. We have supposed that individuals grade their assessments in the unit interval and we aggregate these opinions in order to obtain a collective assessment for each agent. This aggregation procedure is based on a class of weighted quasi-arithmetic means. We have considered decision rules which select the final set of experts taking into account the collective assessments obtained for each individual by using different qualification levels. In the paper we prove the main properties of the proposed decision rules.

Keywords: *group decision-making, individuals' selection, fuzzy assessments, weighted quasi-arithmetic means.*

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se aborda el problema de cómo decidir qué agentes de un grupo satisfacen un determinado atributo, teniendo en cuenta las opiniones que los propios individuos tienen sobre ellos mismos y sobre los demás miembros del colectivo. Uno de los orígenes de este tipo de planteamientos se basa en la identificación de los miembros de un colectivo respecto de atributos religiosos y étnicos: ¿Quién es judío? (Kasher (1993)). A partir de este trabajo, Kasher, Rubinstein (1997), Samet, Schmeidler (2003), Billot (2003), Sung, Dimitrov (2003) y Dimitrov, Sung, Xu (2003) analizan problemas de selección de individuos desde la perspectiva de la Teoría de la Elección Social.

El problema original mencionado puede generalizarse a muy diversos atributos, en particular a la selección de expertos dentro de un grupo, a partir de las opiniones de los propios miembros del colectivo. Se ha de señalar que los trabajos citados abordan la cuestión desde una perspectiva dicotómica; es decir, los agentes únicamente pueden opinar de forma extrema, señalando qué individuos satisfacen o no un determinado atributo. No obstante, cabe destacar que en Ballester, García Lapresta (2004) se analizan problemas de selección de individuos a partir de valoraciones individuales no dicotómicas.

Supongamos que un determinado grupo de agentes debe decidir qué miembros del grupo son adecuados para llevar a cabo una cierta tarea que exige determinadas cualidades. Dado que tales atributos suelen ser vagos, cada uno de los agentes podrá opinar de forma gradual sobre sí mismo y sobre el resto de los individuos, usando valores numéricos en el intervalo unidad. La agregación de estas valoraciones individuales se llevará a cabo a través de reglas graduales, las cuales asignarán una valoración colectiva entre 0 y 1 sobre cada agente, teniendo en cuenta las opiniones individuales. Se supondrá que estas reglas graduales son independientes, en el sentido de Samet, Schmeidler (2003), de tal manera que sólo se consideran las opiniones sobre el individuo a evaluar y no otras, por suponerse irrelevantes. Este proceso equivale a disponer de tantos operadores de agregación como agentes haya.

Una vez establecido el marco general, hemos utilizado como operadores de agregación una clase de medias cuasiaritméticas ponderadas, las cuales permiten graduar diferentes tipos de liberalismo con la ayuda de un parámetro, el cual refleja la importancia que se quiera dar a la opinión que cada individuo tenga sobre sí mismo, según el tipo de problema de decisión abordado. Algunos estudios sobre medias cuasiaritméticas ponderadas y operadores de agregación se encuentran en Aczél (1996, 1987), Aczél, Alsina (1987), Bullen, Mitrinovic, Vasic (1988), Ovchinnikov (1990), Fodor, Roubens (1994) y Calvo, Kolesárova, Komorníková, Mesiar (2002), entre otros.

Cuando los operadores de agregación mencionados asignan una valoración colectiva para cada individuo, se procede a seleccionar el conjunto final de individuos, una vez fijado un nivel de cualificación. Esta segunda fase del proceso se lleva a cabo mediante reglas de decisión asociadas a las reglas graduales introducidas en la primera fase. Se demuestran las principales propiedades de las reglas de decisión utilizadas.

El trabajo se organiza de la siguiente forma. La sección 2 está dedicada a introducir las reglas graduales independientes, los operadores de agregación y sus propiedades, así como las medias cuasiaritméticas ponderadas. En la sección 3 se aborda un liberalismo gradual gracias a la ayuda de un parámetro, mediante el cual es posible ponderar de diversas formas la valoración que cada individuo tiene sobre sí mismo, y se establecen las propiedades de las reglas graduales independientes asociadas a las medias cuasiaritméticas ponderadas consideradas en la sección anterior. La sección 4 contiene el estudio de las reglas de decisión asociadas a las reglas graduales anteriormente analizadas y sus principales propiedades. Finalmente, la sección 5 incluye algunas conclusiones del trabajo.

Notación. Sea $N = \{1,\ldots,n\}$ el conjunto de individuos pertenecientes a un grupo. Con 2^N se indica el conjunto potencia de *N*, es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de *N*. Se utilizará negrita para expresar los vectores de $[0,1]^n$: $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, $\mathbf{1} = (1,\ldots,1)$, $\mathbf{0} = (0,\ldots,0)$. Dados dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0,1]^n$, con $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ denotamos $x_i \geq y_i$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$. Dada una biyección $\pi : N \to N$, con $\pi(\mathbf{x})$ denotamos $\left(x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(n)}\right)$.

Un *perfil* *P* es una matriz $n \times n$ con coeficientes en el intervalo $[0,1]$,

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

donde P_{ij} es la valoración que el individuo *i* da sobre el individuo *j* en cuanto a su grado de cumplimiento del atributo fijado. De esta forma, cada fila *i* en dicho perfil *P* describe las valoraciones del individuo *i* sobre el resto de los agentes, incluido él mismo. Cada columna *j* de dicho perfil muestra las valoraciones acerca del individuo *j*, incluida la que tiene sobre sí mismo. El conjunto de perfiles, $M_{n\times n}([0,1])$, está formado por todas las posibles matrices de orden $n \times n$ con coeficientes en el intervalo $[0,1]$.

2. REGLAS GRADUALES INDEPENDIENTES

Definición 1. Una *regla gradual* es una función $f : M_{n\times n}([0,1]) \to [0,1]^n$ que asocia a cada perfil P un vector $f(P) = (f_1(P),\ldots,f_n(P)) \in [0,1]^n$, donde $f_j(P)$ es la valoración colectiva obtenida por el individuo j de acuerdo con f en el perfil P.

En García Lapresta, Llamazares (2000, Theorem 1) se proporciona una condición necesaria y suficiente para la neutralidad en las reglas de agregación de preferencias difusas. Tomando esa misma idea podemos introducir un axioma de independencia para reglas graduales.

Definición 2. Una regla gradual $f : M_{n\times n}([0,1]) \to [0,1]^n$ es *independiente* si para cada individuo $j \in N$ existe una función, denominada *operador de agregación*, $F_j : [0,1]^n \to [0,1]$, tal que $f_j(P) = F_j(P_{1j},\ldots,P_{jj},\ldots,P_{nj})$, para cada perfil $P \in M_{n\times n}([0,1])$.

La independencia implica que la valoración colectiva de cada individuo se obtiene teniendo en cuenta únicamente las opiniones sobre el individuo evaluado. Entonces, $f(P) = (F_1(P_{11},\ldots,P_{n1}),\ldots,F_n(P_{1n},\ldots,P_{nn}))$. Así, considerar una regla gradual independiente es equivalente a tomar n operadores de agregación $F_1,\ldots,F_n$.

A continuación presentamos algunos conceptos acerca de los operadores de agregación incluidos en la definición de las reglas graduales independientes.

Definición 3. Sea $F:[0,1]^n \to [0,1]$ un operador de agregación:

1. F es *unánime* si para todo $t \in [0,1]$: $F(t \cdot \mathbf{1}) = t$.

2. F es *anónimo* si para toda biyección $\pi : N \to N$ y todo $\mathbf{x} \in [0,1]^n$:

$$F(\pi(\mathbf{x})) = F(\mathbf{x}).$$

3. F es *monótono* si para cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0,1]^n$:

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{y} \Rightarrow F(\mathbf{x}) \geq F(\mathbf{y}).$$

4. F es *compensativo* si para todo $\mathbf{x} \in [0,1]^n$:

$$\min\{x_1,\ldots,x_n\} \leq F(\mathbf{x}) \leq \max\{x_1,\ldots,x_n\}.$$

5. F es *auto-dual* si para todo $\mathbf{x} \in [0,1]^n$: $F(\mathbf{1}-\mathbf{x}) = 1 - F(\mathbf{x})$.

Observación. Sea $F:[0,1]^n \to [0,1]$ un operador de agregación.

- Si F es compensativo, entonces F es unánime.
- Si F es monótono, entonces F es unánime si y sólo si F es compensativo.
- Si F es auto-dual, entonces $F(\mathbf{1}) = 1$ equivale a $F(\mathbf{0}) = 0$.

Definición 4. Dada una regla gradual independiente f con operadores de agregación asociados $F_1,\ldots,F_n$, diremos que f es *unánime*, *anónima*, *monótona, compensativa*, *auto-dual* o *continua* si $F_1,\ldots,F_n$ satisfacen las propiedades con el mismo nombre.

El liberalismo se ha entendido en este trabajo de forma gradual, según la importancia que el colectivo otorgue a la opinión que cada individuo tiene sobre sí mismo. El liberalismo absoluto consistiría en que la opinión colectiva sobre cada uno de los individuos fuera la que ellos poseen sobre sí mismos, sin tener en cuenta ninguna otra. Por tal motivo, el anonimato es una propiedad muy restrictiva para abordar el liberalismo, ya que la valoración que cada individuo tiene sobre sí mismo puede tener un tratamiento diferenciado a la que el agente tiene sobre el resto de los agentes del grupo. Por esta razón hemos introducido una versión más débil del anonimato, en donde la simetría de las reglas graduales independientes es sólo aplicable a las opiniones de aquellos individuos que no son evaluados en ese momento.

Definición 5. Dada una regla gradual independiente f con operadores de agregación asociados $F_1,\ldots,F_n$, diremos que f es *débilmente anónima* si para todo $j \in N$ y toda biyección $\pi : N-\{j\} \rightarrow N-\{j\}$:

$$F_j\left(P_{\pi(1)j},\ldots,P_{\pi(j-1)j},P_{jj},P_{\pi(j+1)j},\ldots,P_{\pi(n)j}\right)=F_j\left(P_{1j},\ldots,P_{(j-1)j},P_{jj},P_{(j+1)j},\ldots,P_{nj}\right)$$

para todo perfil $P \in M_{n\times n}\left([0,1]\right)$.

Obviamente, el anonimato implica el anonimato débil.

Una clase de operadores de agregación interesante para abordar el problema del liberalismo es la correspondiente a las medias cuasiaritméticas ponderadas. En primer lugar introducimos las medias cuasiaritméticas.

Definición 6. Una función $\varphi : [0,1] \rightarrow [0,1]$ es un *automorfismo de orden* si es una función biyectiva y creciente.

De acuerdo con García Lapresta, Llamazares (2000, pp. 684-685), si φ es un automorfismo de orden, entonces φ es continuo, estrictamente creciente y verifica $\varphi(0)=0$ y $\varphi(1)=1$; además φ^{-1} también es un automorfismo de orden con las mismas propiedades.

Definición 7. Dado un automorfismo de orden $\varphi:[0,1]\rightarrow[0,1]$, la *media cuasiaritmetica asociada a* φ es el operador de agregación $F_\varphi:[0,1]^n\rightarrow[0,1]$ definido por:

$$F_\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_n)}{n}\right).$$

Es fácil comprobar que F_φ es siempre unánime, anónimo, monótono, compensativo y continuo. En García Lapresta, Llamazares (2001, pp. 471-473) se demuestra que para todo automorfismo de orden $\varphi:[0,1]\rightarrow[0,1]$, F_φ es auto-dual si y sólo si se verifica $\varphi(1-x)=1-\varphi(x)$ para todo $x\in[0,1]$. En este sentido, podemos decir que el automorfismo de orden φ es *auto-dual*. Resulta inmediato comprobar que si φ es auto-dual, entonces $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ y φ^{-1} es también auto-dual.

A pesar de que las medias cuasiaritméticas tienen buenas propiedades, el anonimato puede ser contraproducente en la modelización del liberalismo, dentro del marco de las reglas graduales independientes. Por esta razón, consideraremos medias cuasiaritméticas ponderadas que, si bien no son anónimas, cumplen algunas de las propiedades más interesantes de las medias cuasiaritméticas.

Definición 8. Sean $\varphi:[0,1]\rightarrow[0,1]$ un automorfismo de orden y $\mathbf{w}=(w_1,\ldots,w_n)\in[0,1]^n$ un vector de pesos tal que $w_1+\cdots+w_n=1$. La *media* *cuasiaritmética ponderada asociada a* φ *y* $\mathbf{w}$ es el operador de agregación $F_\varphi^{\mathbf{w}} : [0,1]^n \to [0,1]$ definido por:

$$F_\varphi^{\mathbf{w}}(x_1,\ldots,x_n) = \varphi^{-1}\left(w_1\varphi(x_1)+\cdots+w_n\varphi(x_n)\right).$$

Resulta inmediato comprobar que $F_\varphi^{\mathbf{w}}$ es siempre unánime, monótono, compensativo y continuo. Además, si φ es auto-dual, entonces $F_\varphi^{\mathbf{w}}$ es también auto-dual; y $F_\varphi^{\mathbf{w}}$ es anónimo si y sólo si $w_i = \frac{1}{n}$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$, es decir, $F_\varphi^{\mathbf{w}}$ es la media cuasiaritmética asociada a φ, $F_\varphi^{\mathbf{w}}$.

3. LIBERALISMO

A la hora de establecer qué individuos son adecuados respecto de un determinado atributo o tarea a desempeñar, el liberalismo extremo consiste en que la valoración colectiva de un determinado agente queda definida por la opinión que el propio agente tiene sobre sí mismo. Esta situación podría darse cuando los miembros del colectivo de expertos aceptaran que el trabajo a desempeñar lo realizaran aquéllos que se consideraran aptos para ello. En el otro extremo tendríamos el caso en el que no se tienen en cuenta las opiniones que los agentes tienen sobre sí mismos, para así evitar posibles autovaloraciones no objetivas y contemplar sólo las opiniones que los pares tienen sobre cada experto.

Con el fin de plantear un modelo donde el liberalismo esté contemplado de forma gradual, en función del atributo o de la tarea a desempeñar, a continuación se introduce una clase de reglas graduales independientes asociadas a una familia concreta de medias cuasiariméticas ponderadas.

Sea $\gamma \in [0,1]$ un parámetro. Para cada agente $j \in N$, consideramos el vector de pesos $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ definido por:

$$w_i = \begin{cases} \gamma, \text{ si } i = j, \\ \dfrac{1-\gamma}{n-1}, \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

Obsérvese que $(w_1, \dots, w_n) \in [0,1]^n$ y $w_1 + \cdots + w_n = 1$.

En primer lugar tendremos en cuenta la media aritmética ponderada correspondiente asociada a $\mathbf{w}$ ($\varphi(x) = x$ para todo $x \in [0,1]$). Así, la valoración colectiva del agente j viene dada por:

$$F_j\left(P_{1j}, \dots, P_{jj}, \dots, P_{nj}\right) = \gamma P_{jj} + \frac{1-\gamma}{n-1} \sum_{i \neq j} P_{ij} \quad (1)$$

para todo perfil $P \in M_{n \times n}([0,1])$.

En los casos extremos de γ hay claras interpretaciones en relación al liberalismo:

- Para $\gamma = 0$, la valoración colectiva acerca del agente j no tiene en cuenta la propia opinión del agente j sobre sí mismo y es obtenida como la media aritmética de las opiniones individuales de los agentes, exceptuando la del propio individuo evaluado:

$$F_j\left(P_{1j}, \dots, P_{jj}, \dots, P_{nj}\right) = \frac{1}{n-1} \sum_{i \neq j} P_{ij},$$

para cada perfil $P \in M_{n \times n}([0,1])$.

- Para $\gamma = \frac{1}{n}$, la valoración colectiva sobre el individuo j es justamente la media aritmética de las opiniones de todos los agentes:

  $$F_j\left(P_{1j},\ldots,P_{jj},\ldots,P_{nj}\right) = \frac{1}{n}P_{jj} + \frac{1}{n}\sum_{i \neq j} P_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_{ij} \ ,$$

  para cada perfil $P \in M_{n \times n}\left(\left[0,1\right]\right)$.

  En este caso la opinión del individuo evaluado es una más y tiene la misma influencia que la del resto de los agentes sobre su propia valoración colectiva.

- Para $\gamma = 1$, la valoración colectiva sobre un agente queda determinada por la opinión que el propio agente tiene sobre sí mismo:

  $$F_j\left(P_{1j},\ldots,P_{jj},\ldots,P_{nj}\right) = P_{jj} \ ,$$

  para cada perfil $P \in M_{n \times n}\left(\left[0,1\right]\right)$.

  En este caso carecen de importancia las opiniones que el resto de los agentes tienen sobre el individuo a evaluar y la regla gradual independiente asociada a $F_1,\ldots,F_n$ sería la más liberal de todas las de la clase presentada.

Ahora tendremos en cuenta un caso más general, en donde se utilizan medias cuasiaritméticas ponderadas.

Consideraremos de nuevo un parámetro $\gamma \in \left[0,1\right]$ y para cada individuo $j \in N$ sea $\mathbf{w} = \left(w_1,\ldots,w_n\right)$ el vector de pesos:

$$w_i = \begin{cases} \gamma, \text{ si } i = j, \\ \dfrac{1-\gamma}{n-1}, \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

Así, podemos definir:

$$F_j\left(P_{1j},\ldots,P_{jj},\ldots,P_{nj}\right) = \varphi^{-1}\left(\gamma\,\varphi\left(P_{jj}\right) + \frac{1-\gamma}{n-1}\sum_{i\neq j}\varphi\left(P_{ij}\right)\right) \qquad (2)$$

para cada perfil $P \in M_{n\times n}\left(\left[0,1\right]\right)$.

En la siguiente proposición establecemos algunas propiedades de las reglas graduales consideradas.

Proposición 1. Para cada automorfismo de orden $\varphi:\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]$ y $\gamma\in\left[0,1\right]$, las reglas graduales independientes asociadas a las medias cuasiaritméticas ponderadas definidas en (2) son unánimes, débilmente anónimas, monótonas, compensativas y continuas. Además, si φ es auto-dual, entonces la regla gradual asociada también es auto-dual.

<u>Demostración:</u> Sean $\varphi:\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]$ un automorfismo de orden, $\gamma\in\left[0,1\right]$ y *f* la regla gradual independiente asociada a $F_1,\ldots,F_n$, donde

$$F_j\left(P_{1j},\ldots,P_{jj},\ldots,P_{nj}\right) = \varphi^{-1}\left(\gamma\,\varphi\left(P_{jj}\right) + \frac{1-\gamma}{n-1}\sum_{i\neq j}\varphi\left(P_{ij}\right)\right).$$

1. *f* es unánime: para todo $t\in[0,1]$ se cumple

$$F_j\left(t,\ldots,t,\ldots,t\right) = \varphi^{-1}\left(\gamma\,\varphi\left(t\right) + \frac{1-\gamma}{n-1}\sum_{i\neq j}\varphi\left(t\right)\right) = \varphi^{-1}\left(\varphi\left(t\right)\right) = t\,.$$

2. *f* es débilmente anónima: para toda biyección $\pi : N-\{j\} \rightarrow N-\{j\}$ se verifica

$$F_j\left(P_{\pi(1)j},\ldots,P_{\pi(j-1)j},P_{jj},P_{\pi(j+1)j},\ldots,P_{\pi(n)j}\right)=$$
$$=\varphi^{-1}\left(\gamma\,\varphi\left(P_{jj}\right)+\frac{1-\gamma}{n-1}\sum_{i\neq j}\varphi\left(P_{\pi(i)j}\right)\right)=$$
$$=\varphi^{-1}\left(\gamma\,\varphi\left(P_{jj}\right)+\frac{1-\gamma}{n-1}\sum_{i\neq j}\varphi\left(P_{ij}\right)\right)=$$
$$=F_j\left(P_{1j},\ldots,P_{(j-1)j},P_{jj},P_{(j+1)j},\ldots,P_{nj}\right).$$

3. *f* es monótona y compensativa por ser φ y φ^{-1} crecientes.

4. *f* es continua por serlo φ y φ^{-1}.

5. *f* es auto-dual si φ lo es:

$$F_j\left(1-P_{1j},\ldots,1-P_{jj},\ldots,1-P_{nj}\right)=$$
$$=\varphi^{-1}\left(\gamma\,\varphi\left(1-P_{jj}\right)+\frac{1-\gamma}{n-1}\sum_{i\neq j}\varphi\left(1-P_{ij}\right)\right)=$$
$$=\varphi^{-1}\left(\gamma\left(1-\varphi\left(P_{jj}\right)\right)+\frac{1-\gamma}{n-1}\sum_{i\neq j}\left(1-\varphi\left(P_{ij}\right)\right)\right)=$$
$$=\varphi^{-1}\left(\gamma-\gamma\,\varphi\left(P_{jj}\right)+1-\gamma-\frac{1-\gamma}{n-1}\sum_{i\neq j}\varphi\left(P_{ij}\right)\right)=$$
$$=\varphi^{-1}\left(1-\gamma\,\varphi\left(P_{jj}\right)-\frac{1-\gamma}{n-1}\sum_{i\neq j}\varphi\left(P_{ij}\right)\right)=$$
$$=1-\varphi^{-1}\left(\gamma\,\varphi\left(P_{jj}\right)+\frac{1-\gamma}{n-1}\sum_{i\neq j}\varphi\left(P_{ij}\right)\right)=$$
$$=1-F_j\left(P_{1j},\ldots,P_{jj},\ldots,P_{nj}\right).$$

4. REGLAS DE DECISIÓN

Las reglas graduales proporcionan una importante información acerca de los miembros de un colectivo, teniendo en cuenta las opiniones individuales de los agentes. Sin embargo, nuestro objetivo consiste en seleccionar de manera efectiva qué individuos van a resultar seleccionados, de acuerdo con el atributo considerado. Para dar solución a este problema, hemos considerado una clase de reglas de decisión asociadas a cada regla gradual independiente. Esta clase está definida por medio de un parámetro que va a permitir usar diferentes umbrales de cualificación en la decisión colectiva.

Definición 9. Una *regla de decisión* es una función $g : M_{n\times n}([0,1]) \to 2^N$ que asocia a cada perfil $P \in M_{n\times n}([0,1])$ un subconjunto de agentes $g(P) \subseteq N$.

Definición 10. Sea $g : M_{n\times n}([0,1]) \to 2^N$ una regla de decisión.

1. g es *independiente* si para todo par de perfiles $P, Q \in M_{n\times n}([0,1])$ y todo $j \in N$, tales que $P_{ij} = Q_{ij}$ para todo $i \in N$:

$$j \in g(P) \quad \Leftrightarrow \quad j \in g(Q).$$

2. g es *unánime* si para todo perfil $P \in M_{n\times n}([0,1])$ y todo $j \in N$:

$$\forall i \in N \;\; P_{ij} = 1 \quad \Rightarrow \quad j \in g(P).$$

3. g es *monótona* si para todo par de perfiles $P, Q \in M_{n\times n}([0,1])$ tales que $P_{ij} \le Q_{ij}$ para cualesquiera $i, j \in N$: $g(P) \subseteq g(Q)$.

4. g es *auto-dual* si para todo perfil $P \in M_{n\times n}([0,1])$ y todo $k \in N$:

$$k \in g(P) \;\; \Rightarrow \;\; k \notin g(Q),$$

donde $Q_{ij} = 1 - P_{ij}$ para cualesquiera $i, j \in N$.

5. g es *no-degenerada* si para todo $j \in N$ existen perfiles $P, Q \in M_{n\times n}([0,1])$ tales que $j \in g(P)$ y $j \notin g(Q)$.

Definición 11. Sea $f: M_{n\times n}([0,1]) \to [0,1]^n$ una regla gradual y $\alpha \in [0,1]$. La α*-regla de decisión asociada a* f es la función $f^\alpha : M_{n\times n}([0,1]) \to 2^N$ definida por $f^\alpha(P) = \{j \in N \mid f_j(P) \geq \alpha\}$, para cada perfil $P \in M_{n\times n}([0,1])$.

Podemos observar que para cada perfil $P \in M_{n\times n}([0,1])$, se verifica $f^0(P) = N$ y $f^\beta(P) \subseteq f^\alpha(P)$ cuando $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$.

Hemos de notar que el concepto de α-regla de decisión generaliza el de *reglas de consentimiento* de Samet, Schmeidler (2003) (en su caso para valoraciones dicotómicas).

Observación. Si $f: M_{n\times n}([0,1]) \to [0,1]^n$ es una regla gradual independiente, con operadores de agregación asociados $F_1,\ldots,F_n$, y $\alpha \in [0,1]$, la α-regla de decisión asociada a f viene definida por:

$$f^\alpha(P) = \{j \in N \mid F_j(P_{1j},\ldots,P_{nj}) \geq \alpha\},$$

para todo perfil $P \in M_{n\times n}([0,1])$. Obviamente f^α es una regla de decisión independiente para cada $\alpha \in [0,1]$.

En la siguiente proposición mostramos algunas propiedades que las reglas de decisión heredan de las reglas graduales independientes correspondientes.

Proposición 2. Sea $f: M_{n\times n}([0,1]) \rightarrow [0,1]^n$ una regla gradual independiente:

1. Si f es unánime, entonces f^{α} es unánime para todo $\alpha \in [0,1]$.

2. f es monótona si y solo si f^{α} es monótona para todo $\alpha \in [0,1]$.

3. Si f es auto-dual, entonces f^{α} es auto-dual para todo $\alpha \in \left(\frac{1}{2},1\right]$.

Demostración: Sea f una regla gradual independiente con operadores de agregación asociados $F_1,\ldots,F_n$.

1. Supongamos f unánime y sea P un perfil donde $P_{ij}=1$ para todo $i \in N$. Entonces, $F_j\left(P_{1j},\ldots,P_{nj}\right)=F_j\left(1,\ldots,1\right)=1\geq\alpha$ y $j \in f^{\alpha}(P)$.

2. Supongamos f monótona y sean P, Q dos perfiles tales que $P_{ij} \leq Q_{ij}$ para cualesquiera $i,j \in N$. Si $k \in f^{\alpha}(P)$, entonces $F_k\left(P_{1k},\ldots,P_{nk}\right)\geq\alpha$ y, por tanto, $F_k\left(Q_{1k},\ldots,Q_{nk}\right)\geq F_k\left(P_{1k},\ldots,P_{nk}\right)\geq\alpha$, es decir, $k \in f^{\alpha}(Q)$. Ahora supongamos f^{α} monótona para todo $\alpha \in [0,1]$ y sean $\mathbf{x},\mathbf{y} \in [0,1]^n$ tales que $x_i \leq y_i$ para cualesquiera $i \in \{1,\ldots,n\}$. Definimos dos perfiles P y Q por medio de $P_{ij}=x_i$ y $Q_{ij}=y_i$ para cualesquiera $i,j \in N$. Dado que $P_{ij} \leq Q_{ij}$ para cualesquiera $i,j \in N$, se tiene $f^{\alpha}(P) \subseteq f^{\alpha}(Q)$. Tomando $\alpha = F_j\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, se tiene $j \in f^{\alpha}(P)$. Así, $j \in f^{\alpha}(Q)$ y, entonces, $F_j\left(y_1,\ldots,y_n\right)=F_j\left(Q_{1j},\ldots,Q_{nj}\right)\geq\alpha$.

3. Supongamos f auto-dual, $\alpha \in \left(\frac{1}{2},1\right]$, $k \in f^{\alpha}(P)$ y $k \in f^{\alpha}(Q)$, donde Q es el perfil definido por $Q_{ij} = 1 - P_{ij}$ para cualesquiera $i, j \in N$. Si $F_k\left(P_{1k},\ldots,P_{nk}\right) \geq \alpha$, se tiene

$$1 - F_k\left(P_{1k},\ldots,P_{nk}\right) = F_k\left(1-P_{1k},\ldots,1-P_{nk}\right) = F_k\left(Q_{1k},\ldots,Q_{nk}\right) \geq \alpha .$$

Sumando se obtiene $1 \geq 2\alpha$, en contra de $\alpha \in \left(\frac{1}{2},1\right]$.

En la siguiente proposición demostramos que las α -reglas de decisión definidas por las medias cuasiaritméticas (2) tienen algunas interesantes propiedades.

Proposición 3. Para cada automorfismo de orden $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ y $\alpha,\gamma \in [0,1]$, las α -reglas de decisión asociadas a las reglas graduales independientes definidas por (2) son unánimes, débilmente anónimas y monótonas. Además, f^{α} es no degenerada para $\alpha > 0$, y auto-dual cuando $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ es auto-dual y $\alpha > 0.5$.

<u>Demostración:</u> Sean $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ un automorfismo de orden y $\gamma \in [0,1]$. Es fácil comprobar que toda α -regla de decisión asociada a las reglas graduales independientes definidas por

$$F_j\left(P_{1j},\ldots,P_{jj},\ldots,P_{nj}\right) = \varphi^{-1}\left(\gamma\,\varphi\left(P_{jj}\right) + \frac{1-\gamma}{n-1}\sum_{i\neq j}\varphi\left(P_{ij}\right)\right)$$

es unánime, débilmente anónima y monótona. Con el fin de justificar la no-degeneración, supongamos $\alpha,\gamma > 0$ y consideremos dos perfiles $P,Q \in M_{n\times n}\left([0,1]\right)$ tales que $P_{ij} = 1$ si $i \neq j$, $P_{jj} \geq \alpha$, $Q_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $Q_{jj} < \alpha$. Para justificar $j \in f^{\alpha}(P)$ será necesario comprobar que se verifica

$\gamma\varphi(P_{jj})+\frac{1-\gamma}{n-1}\sum_{i\neq j}\varphi(P_{ij})\geq\varphi(\alpha)$, lo que es equivalente a $\varphi(P_{jj})\geq\frac{\varphi(\alpha)+\gamma-1}{\gamma}$.

Puesto que $\frac{1-\varphi(\alpha)}{\gamma}\geq 1-\varphi(\alpha)$, se tiene $\varphi(\alpha)\geq 1-\frac{1-\varphi(\alpha)}{\gamma}=\frac{\varphi(\alpha)+\gamma-1}{\gamma}$.

Debido a $P_{jj}\geq\alpha$, se tiene $\varphi(P_{jj})\geq\varphi(\alpha)\geq\frac{\varphi(\alpha)+\gamma-1}{\gamma}$. Para justificar $j\notin f^{\alpha}(Q)$ será necesario comprobar $\gamma\varphi(Q_{jj})+\frac{1-\gamma}{n-1}\sum_{i\neq j}\varphi(Q_{ij})<\varphi(\alpha)$, lo cual es equivalente a $\varphi(Q_{jj})<\frac{\varphi(\alpha)}{\gamma}$. Puesto que $Q_{jj}<\alpha$, se tiene $\varphi(Q_{jj})<\varphi(\alpha)\leq\frac{\varphi(\alpha)}{\gamma}$. Si $\alpha>0$ y $\gamma=0$, consideremos los perfiles $P,Q\in M_{n\times n}([0,1])$ definidos por $P_{ij}=1$ y $Q_{ij}=0$ para cualesquiera $i,j\in N$. Entonces se tiene $F_j(P_{1j},\ldots,P_{nj})=\varphi^{-1}(1)\geq\alpha$ y $F_j(Q_{1j},\ldots,Q_{nj})=\varphi^{-1}(0)<\alpha$. Consecuentemente, $j\in f^{\alpha}(P)$ y $j\notin f^{\alpha}(Q)$. Por otra parte, si $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ es auto-dual y $\alpha>0.5$, por las Proposiciones 1 y 2, f^{α} es auto-dual.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se proponen y analizan procedimientos de selección de individuos en un grupo con relación a un determinado atributo. Dado que, por lo general, los atributos respecto de los que se juzga a los individuos son vagos e imprecisos, parece natural contemplar el problema en cuestión desde la lógica difusa en lugar de la clásica, demasiado rígida para abordar adecuadamente los juicios humanos. Así, se toma como premisa que los individuos puedan matizar sus opiniones de forma gradual, asignando una valoración numérica en el intervalo unidad a cada uno de los miembros del grupo. Para agregar las opiniones individuales hemos considerado una clase de medias cuasiaritméticas ponderadas. Gracias a estos operadores de agregación, se construye una valoración colectiva sobre cada individuo en función de un parámetro (γ) que permite graduar la influencia de las opiniones que los individuos tienen sobre sí mismos en la valoración colectiva. Con ello se da cabida a diversos grados de liberalismo, lo cual permite abordar problemas de muy diversa naturaleza.

Una vez asignada una valoración colectiva a cada uno de los miembros del grupo, se hace necesario tomar una decisión final sobre qué individuos son seleccionados respecto del atributo en cuestión. Para ello hemos considerado reglas de decisión que, gracias a la utilización de umbrales de exigencia (α), permiten seleccionar a los individuos que alcanzan el nivel de cualificación deseado.

Se demuestran varias propiedades, tanto de las reglas graduales que originan las valoraciones colectivas de los individuos, como de las reglas de decisión que seleccionan los miembros del grupo a partir de las valoraciones obtenidas por los individuos, así como de los niveles de cualificación exigidos.

Como principales ventajas del proceso de selección propuesto y analizado se han de señalar las siguientes:

1. Los individuos pueden graduar cómo valoran la adecuación de los miembros del grupo respecto del atributo considerado.
2. La valoración colectiva de los individuos puede contemplar diversos grados de liberalismo, concediendo mayor o menor

importancia a la autoevaluación de los individuos, según el valor que se asigne al parámetro correspondiente.

3. El uso de medias cuasiaritméticas ponderadas para la obtención de las valoraciones colectivas permite transformar las valoraciones iniciales de acuerdo con diferentes patrones de normalización.
4. La utilización de umbrales de cualificación para la selección final da cabida a diferentes grados de compromiso respecto del objetivo a lograr.

En definitiva, la flexibilidad del modelo planteado permite abordar problemas de muy diversa naturaleza. A pesar de que el proceso de decisión cuenta con buenas propiedades, un problema abierto consiste en lograr una caracterización axiomática que lo deslinde de otros posibles.

REFERENCIAS

[1] Aczél J. (1966). *Lectures on Functional Equations and their Applications*, Academic Press, Nueva York.

[2] Aczél J. (1987). *A Short Course on Functional Equations*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

[3] Aczél J., Alsina C. (1987). "Synthesizing judgments: a functional equations approach". *Mathematical Modelling*, vol. 9/3-5, 311-320.

[4] Ballester M.A., García Lapresta J.L. (2004). "A model of elitist qualification". *ASSET Annual Meeting 2004*.

[5] Billot A. (2003). "How the liberalism kills democracy or Sen´s theorem revisited". *Public Choice*, vol. 116, 247-270.

[6] Bullen P.S., Mitrinovic D.S., Vasic P.M. (1988). *Means and Their Inequalities*, Reidel, Dordrecht.

[7] Calvo T., Kolesárova A., Komorníková M., Mesiar R. (2002). "Aggregation operators: Properties, classes and constructions models". En T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar (eds.), *Aggregation Operators: New Trends and Applications*. Physica-Verlag, Heidelberg, 3-104.

[8] Dimitrov D., Sung S.C., Xu Y. (2003). "Procedural group identification". Tilburg University, CentER Discussion Paper 2003-10.

[9] Fodor J., Roubens M. (1994). *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[10] García Lapresta J.L., Llamazares B. (2000). "Aggregation of fuzzy preferences: Some rules of the mean". *Social Choice and Welfare*, vol. 17, 673-690.

[11] García Lapresta J.L., Llamazares B. (2001). "Majority decisions based on difference of votes". *Journal of Mathematical Economics*, vol. 45, 463-481.

[12] Kasher A. (1993). "Jewish collective identity". En D.T. Goldberg, M. Krausz (eds.), *Jewish Identity*, Temple University Press, Philadelphia, 56-78.

[13] Kasher A., Rubinstein A. (1997). "On the question 'Who is a J?'. A social choice approach". *Logique & Analyse*, vol. 160, 385-395.

[14] Ovchinnikov S.V. (1990). "Means and social welfare functions in fuzzy binary relation spaces". En J. Kacprzyk, M. Fedrizzi (eds.),

Multiperson Decision Making Using Fuzzy Sets and Possibility Theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 143-154.

[15] Samet D., Schmeidler D. (2003). "Between liberalism and democracy". *Journal of Economic Theory*, vol. 110, 213-233.

[16] Sung S.C, Dimitrov D. (2003). "On the axiomatic characterization of 'Who is a J?'". *Logique & Analyse*, en prensa.