

LA VALORACIÓN DE EMPRESAS CON INFORMACIÓN LINGÜÍSTICA APLICANDO EXPERTONES Y 2-TUPLAS

Cristina Mendaña Cuervo, Enrique López González,
Carlos Caño Alegre, Begoña González Pérez
Departamento de Dirección y Economía de la Empresa
Facultad CC. EE. y Empresariales. Universidad de León.
Universidad de León
Campus de Vegazana, s/n
E-24071 - León - España
dde{cmc, elg, cca, bgp}@unileon.es

Recibido 13 de octubre 2004, recibido con observaciones 20 de febrero 2005,
aceptado 17 de marzo 2005

Resumen

El propósito del presente trabajo consiste en abordar la problemática de la valuación económico-financiera en entornos de incertidumbre, donde es posible que la información utilizable por las unidades económicas sólo se pueda obtener mediante la opinión de expertos. En este ámbito se propondrá un modelo que permita el tratamiento de dicha información mediante etiquetas lingüísticas, frente a su presentación mediante valores numéricos precisos. Adicionalmente, se analizará la posibilidad de representar dicha información mediante la utilización de 2-tuplas lingüísticas, metodología que permite la operativa con información suministrada en distintos dominios de expresión. Por otra parte, y ante los buenos resultados de los Expertones en problemas de agregación de juicios de expertos, se elaborará un modelo híbrido que posibilite la aplicación conjunta de los Expertones con la representación mediante 2-tuplas lingüísticas para la valoración de empresas.

Palabras clave: *Valoración de empresas, incertidumbre, información lingüística, algoritmos de agregación, 2-tuplas, expertones.*

**ECONOMIC AND FINANCIAL VALUATION OF COMPANIES
USING LINGUISTIC INFORMATION BASED ON EXPERTONS
AND 2-TUPLE LINGUISTIC REPRESENTATION**

Cristina Mendaña Cuervo, Enrique López González,
Carlos Caño Alegre, Begoña González Pérez
Departamento de Dirección y Economía de la Empresa
Facultad CC. EE. y Empresariales. Universidad de León.
Universidad de León
Campus de Vegazana, s/n
E-24071 - León - España
dde{cmc, elg, cca, bgp}@unileon.es

Received 13 october 2004, received in revised form 20 february 2005, accepted
17 march 2005

Summary

The aim of this work is to approach the problem of the economic-financial valuation in an uncertain environment, where the information economic units use is given by experts' opinion. We propose a model that processes information using linguistic label instead of precise numerical values. Moreover, the possibility of representing this information by means of linguistic 2-tuple methodology will be analyzed. This is a methodology that allows operating with information given in different scopes of expression. On the other hand, because the use of Expertons in problems of aggregation of experts' judgements gives good results, we develop a hybrid model that makes possible the joint application of Expertons and linguistic 2-tuple for valuation of companies.

Keywords: *Valuation of companies; uncertainty; linguistic information; aggregation algorithms; 2-tuple representations; expertons.*

1. INTRODUCCIÓN

En procesos de compra, fusiones, adquisiciones, etc., en las que se hace preciso establecer un precio de compraventa que sea aceptado por las partes que intervienen en el proceso, se plantean problemas de valoración de empresas, especialmente en el caso de disponer de información de carácter subjetivo emitida por expertos. De hecho, en estas circunstancias puede no resultar factible establecer un criterio estandarizado que sea útil para cualquier caso, dado que cada operación es en sí misma diferente al resto. De ahí que normalmente la determinación del valor de una empresa se encuentre ligado a un proceso de negociación, si bien es posible establecer mecanismos que faciliten la convergencia a un acuerdo común y que, en multitud de ocasiones, vienen establecidos por las opiniones solicitadas a expertos en el tema que faciliten encontrar un campo común sobre el que las partes interesadas puedan negociar hasta llegar a un acuerdo que satisfaga a ambos.

En las condiciones anteriores se plantea la necesidad de habilitar herramientas que permitan operar con la incertidumbre inherente a las opiniones expresadas por personas que, normalmente, vendrán definidas en valores lingüísticos.

De acuerdo con lo anterior, el objetivo del presente trabajo radica en el cuestionamiento de las posibilidades de la representación mediante 2-tuplas lingüísticas para la valoración de empresas cuando la información disponible se encuentra expresada con etiquetas lingüísticas y en distintos dominios de expresión. Asimismo, y ante la necesidad de someter dicha información a procesos de agregación, se plantea la utilización conjunta de este tipo de representación con la técnica de los expertones trazada por los Prof. Kaufmann y Gil Aluja

(1992). Al objeto de establecer un contraste de la validez de las consideraciones anteriores, también se incluye un ejemplo de aplicación práctica, cuyos resultados permitirán establecer las consideraciones finales a modo de conclusión del presente trabajo.

2. PROBLEMÁTICA DE LA VALORACIÓN ECONÓMICO-FINANCIERA DE EMPRESAS ANTE INCERTIDUMBRE

La acepción “valor de la empresa” depende de la posición desde la que se afronte dicha definición. Así, es posible establecer el valor de la empresa en términos de la estimación que realicen los accionistas y los acreedores sobre los títulos que poseen (acciones y obligaciones), atendiendo entonces al valor de elementos pertenecientes al pasivo del balance, es decir, a la estructura financiera de la empresa. Por el contrario, la consideración del valor de la empresa, desde la posición que adoptan los eventuales vendedores o compradores de la misma, se centra en el valor del activo necesario para generar beneficios y en la perspectiva que se tiene sobre la evolución futura de los mismos.

En la literatura especializada, varios autores han ofrecido diversas alternativas para realizar el proceso de valoración entre los que destacan:

- Criterio del precio histórico. Se basa en considerar como valor de cada elemento del activo el precio por el que se adquirió en el momento de su incorporación, presentando claros inconvenientes al no considerar el efecto de la inflación, del progreso técnico, etc.
- Criterio del valor de reposición. Toma como referencia en la estimación de los precios de cada una de las masas patrimoniales del activo su situación actual en el mercado y su eficiencia económica.

- Criterio del beneficio capitalizado. Parte de la premisa de la obtención de beneficios como objetivo prioritario de la empresa, siendo estos últimos la base para el cálculo del valor de la empresa. De ahí que la valoración se realice descontando, mediante el tipo de interés, los beneficios estimados para periodos futuros.

El proceso de valoración en función de este último criterio debe suponer un valor superior al realizado sobre la base del resto de criterios, denominándose a la diferencia fondo de comercio o *goodwill*, cuyo cálculo se afronta desde dos perspectivas principales: el método directo que consiste en estimar unos beneficios posibles y unos beneficios normales actualizando la diferencia, y el método indirecto que consiste en actualizar la estimación de beneficios y restarle el valor sustancial.

El criterio del beneficio capitalizado matizado con el del valor sustancial da lugar a lo que se denominan métodos mixtos, entre los que destacan el método alemán, el método de Schmalenbach y el método anglosajón. El método alemán trata de evitar el inconveniente de la incertidumbre de los datos futuros. Para ello, y debido a la inexistencia de técnicas apropiadas para realizar su tratamiento, se ha optado por reducir el valor capitalizado a la mitad del *goodwill* tomando como justificación el principio de prudencia valorativa. De esta forma, se tiene que:

$$V_e = V_s + \frac{1}{2} GW = V_c - \frac{1}{2} GW = V_c - \frac{1}{2} (V_c - V_s) = \frac{V_c + V_s}{2} \quad (1)$$

donde: V_e es el valor de la empresa, V_s el valor sustancial, V_c el valor capitalizado y GW el *goodwill* ($V_c - V_s$)

En (1) se puede observar que este método determina el valor de la empresa como la media entre el valor capitalizado y el valor sustancial,

considerando la misma importancia para ambos tipos de valores. Por su parte, el método anglosajón realiza el cálculo añadiendo al valor sustancial el importe total del *goodwill*. En consecuencia, ambos métodos adolecen de similares limitaciones, ya que varía únicamente el procedimiento de cálculo: mientras que en el método alemán el *goodwill* se obtiene indirectamente como diferencia entre el valor capitalizado y el valor sustancial, en el método anglosajón se obtiene actualizando la diferencia entre los beneficios esperados y los rendimientos normales del valor sustancial, con lo cual, siendo i el tipo de interés normal, el valor de la empresa será:

$$V_e = V_s + (B - i V_s) \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \quad (2)$$

La expresión (2) refleja el hecho de que los rendimientos normales en lugar de ser calculados sobre el valor sustancial tienen en cuenta el valor de la empresa, denotando lo que teóricamente pagarán los eventuales compradores.

En caso de que la estimación de beneficios y tipos de interés para los periodos futuros presente distintos valores en cada periodo, el valor de la empresa vendrá determinado por la expresión:

$$V_e = V_s + (B_1 - i_1 V_e)(1+i_1)^{-1} + \dots + (B_n - i_n V_e)(1+i_1)^{-1} (1+i_2)^{-1} \dots (1+i_n)^{-1} \quad (3)$$

Sin embargo, el cálculo así efectuado presenta una serie de inconvenientes que es preciso considerar y tratar de evitar para poder establecer una valoración, lo más cercana a la realidad posible.

Entre los inconvenientes que presenta se encuentra el hecho de que tanto las estimaciones de los tipos de interés como de los beneficios futuros esperados debe ser realizada por expertos, en cuyo caso parece más adecuado establecer un mecanismo que facilite la obtención y

posterior agregación de dicha información.

En efecto, normalmente la información disponible para afrontar esta decisión no se puede obtener de forma precisa mediante un valor cuantitativo (un número), resultando más factible obtenerla expresada por parte de los expertos de forma cualitativa. En este caso, la utilización de un enfoque lingüístico se adapta mejor que un enfoque numérico.

El enfoque lingüístico borroso es un enfoque aproximado que tiene como base teórica para su desarrollo la Teoría de los Subconjuntos Borrosos y que representa los aspectos cualitativos como valores lingüísticos mediante “variables lingüísticas”.

3. REPRESENTACIÓN DE INFORMACIÓN LINGÜÍSTICA MEDIANTE 2-TUPLAS

El modelo de representación que utiliza como base de representación un par de valores o 2-tupla ha sido formulado por Herrera y Martínez (2000) como un sistema válido para la representación y el tratamiento de información lingüística. Este modelo se basa en el concepto de traslación simbólica, el cual se puede definir como sigue: Sea $S = \{s_0, \dots, s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos y $\beta \in [0, g]$ un valor obtenido por un método simbólico operando con información lingüística. La traslación simbólica de un término lingüístico s_i es un número valorado en el intervalo $[-0.5, 0.5]$ que expresa la “diferencia de información” entre una cantidad de información expresada por el valor $\beta \in [0, g]$ obtenido en una operación simbólica e i el valor entero más próximo, $i \in \{0, \dots, g\}$, que indica el índice de la etiqueta lingüística (s_i) más cercana en S .

El modelo de representación basado en el concepto de traslación simbólica utiliza como base de representación 2-tuplas, (τ_i, α_i) donde $\tau_i \in S$ y $\alpha_i \in [-0.5, 0.5]$, siendo τ_i una etiqueta lingüística y α_i el número que expresa el valor de la distancia desde el resultado original β al índice de la etiqueta lingüística más cercana (τ_i) en el conjunto de términos lingüísticos S , es decir, su traslación simbólica.

La utilización de la representación anteriormente expuesta precisa convertir cada etiqueta lingüística en su equivalente en 2-tupla, para lo cual, siendo $s_i \in S$ un término lingüístico perteneciente al conjunto S de términos lingüísticos, su representación mediante una 2-tupla equivalente se obtiene mediante la función θ :

$$\begin{aligned} \theta: S &\rightarrow S \times [-0.5, 0.5] \\ \theta(s_i) &= (s_i, 0) \quad s_i \in S \end{aligned} \tag{4.}$$

Asimismo, a partir de un valor numérico β , $\beta \in (0, g)$, obtenido de una operación simbólica, se puede obtener la 2-tupla lingüística que expresa la información equivalente a β , utilizando la siguiente función:

$$\begin{aligned} \Delta: [0, g] &\rightarrow S \times [-0.5, 0.5] \\ \Delta(\beta) &= \begin{cases} s_i, & i = \text{round}(\beta) \\ \alpha = \beta - i, & \alpha \in [-0.5, 0.5] \end{cases} \end{aligned} \tag{5.}$$

donde *round* es el operador usual de redondeo, s_i la etiqueta con el índice más cercano a β y α el valor de traslación simbólica.

En su aplicación al problema de la valoración de empresas, y ante la necesidad de operar con información suministrada por distintos expertos, se plantea la necesidad de analizar las posibilidades que este modelo de representación ofrece para afrontar el problema de la

agregación de opiniones. En este sentido, la representación de información mediante 2-tuplas lingüísticas tiene definidos operadores propios de agregación, tanto operadores simbólicos extendidos para 2-tuplas lingüísticas como operadores basados en operadores de agregación numéricos. No obstante, y en función de los buenos resultados obtenidos en su aplicación conjunta con la metodología de los expertones (Mendaña Cuervo y López González, 2001), en el desarrollo del presente trabajo se plantea el interés por utilizar conjuntamente la representación basada en 2-tuplas lingüísticas y la teoría de los expertones.

Asimismo, la representación mediante 2-tuplas lingüísticas presenta ventajas sustantivas respecto a otras metodologías, debido a las posibilidades que ofrece para el tratamiento de información suministrada en distintos dominios de expresión, es decir, para operar con información lingüística con diferentes granularidades. En efecto, el proceso de unificación de información ha sido analizado desde diferentes enfoques, si bien todos ellos asumen el riesgo de pérdida de información e imprecisión en los resultados obtenidos. Sin embargo, el modelo propuesto por Herrera y Martínez (2000, 2001) para operar en estas circunstancias, parte de contextos lingüísticos con diferentes granularidades, denominados jerarquías lingüísticas, las cuales cumplen una serie de reglas y condiciones que permiten unificar dicha información en un único dominio de expresión sin pérdida de información. Las jerarquías lingüísticas están compuestas por un conjunto de niveles, donde cada nivel es un conjunto de términos lingüísticos con distinta granularidad al resto de niveles de su jerarquía. Cada nivel de una jerarquía se puede escribir como:

$$L(t, n(t)) \quad 6.$$

donde t es el número que indica el nivel de la jerarquía y $n(t)$ la granularidad del conjunto lingüístico del nivel t .

Los niveles dentro de una jerarquía están ordenados de acuerdo con su granularidad, es decir, para dos niveles sucesivos t y $t+1$ se cumple que $n(t+1) > n(t)$.

De acuerdo con lo anterior se puede definir una jerarquía lingüística (LH) como la unión de todos los niveles t :

$$LH = \bigcup_t l(t, n(t)) \quad 7.$$

Para analizar la construcción de una jerarquía lingüística, teniendo en cuenta que su orden jerárquico viene dado por el incremento de la granularidad de los conjuntos de términos lingüísticos en cada nivel, se parte de un conjunto de etiquetas S sobre el dominio U en el nivel t , tal:

$$S = \{s_0, \dots, s_{n(t)-1}\} \quad 8.$$

siendo s_k los términos lingüísticos del conjunto S con $k = 0, \dots, n(t)-1$.

Para construir una jerarquía lingüística se puede extender la definición de S , permitiendo la existencia de varios conjuntos de términos lingüísticos, cada uno con una granularidad distinta en cada nivel. Para ello se introduce el parámetro $n(t)$ en la definición de un conjunto de etiquetas, que representa la granularidad del conjunto del nivel t donde está definido:

$$S^{n(t)} = \{s_0^{n(t)}, \dots, s_{n(t)-1}^{n(t)}\} \quad 9.$$

En general, cabe admitir que el conjunto de términos del nivel $t+1$ se

obtiene de su predecesor como sigue:

$$L(t, n(t)) \rightarrow L(t+1, 2 \cdot n(t)-1) \tag{10}$$

Asimismo, existe una función que permite trasladar información lingüística de un conjunto de términos a otro sin pérdida de información. Para ello, estos autores definen en primer término el paso de un nivel al inmediatamente superior e inferior, para con posterioridad generalizar el procedimiento de forma que permita transformaciones entre términos de niveles no consecutivos, el cual se realiza mediante una función recursiva de transformación de un término del nivel t a uno del nivel $t'=t+a$, con $a \in Z$ que se define:

$$TF_t^t : l(t, n(t)) \rightarrow l(t', n(t')) \tag{11}$$

- Si $|a| > 1$ entonces $TF_t^t (s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) = TF_{t+\frac{t-t'}{|t-t'|}}^{t+\frac{t-t'}{|t-t'|}} \left(TF_{t+\frac{t-t'}{|t-t'|}}^t (s_i^{n(t)}, \alpha \alpha^{n(t)}) \right)$
- Si $|a| = 1$ entonces $TF_t^t (s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) = TF_{t+\frac{t-t'}{|t-t'|}}^t (s_i^{n(t)}, \alpha \alpha^{n(t)})$

Esta función recursiva se puede definir no recursivamente como sigue:

$$TF_t^t : l(t, n(t)) \rightarrow l(t', n(t'))$$

$$TF_t^{t'} (s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) = \Delta \left(\frac{\Delta (s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) \cdot (n(t')-1)}{n(t)-1} \right) \tag{12}$$

La función de transformación de términos entre distintos niveles de una jerarquía es idempotente:

$$TF_t^{t'} \left(TF_t^t \left(s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)} \right) \right) = \left(s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)} \right) \quad 13.$$

Por tanto:

$$TF_t^{t'} = \Delta \left(\frac{\Delta^{-1} \left(s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)} \right) \cdot (n(t)-1)}{n(t)-1} \right) = \Delta \left(\frac{\Delta^{-1} \left(\Delta \left(\frac{\Delta^{-1} \left(s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)} \right) \cdot (n(t)-1)}{n(t)-1} \right) \right) \cdot (n(t)-1)}{n(t)-1} \right) = 14.$$

$$= \Delta \left(\frac{\Delta^{-1} \left(s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)} \right) \cdot (n(t)-1) \cdot (n(t)-1)}{(n(t)-1) \cdot (n(t)-1)} \right) = \left(s_i^{n(t)}, \alpha_i^{n(t)} \right)$$

Este resultado garantiza la transformación sin pérdida de información, por lo que la representación basada en 2-tuplas lingüísticas permite “traducir” los resultados de los dominios iniciales de cada experto, con independencia del dominio elegido para el proceso de unificación.

Las consideraciones anteriores han conducido a los autores a la utilización de esta metodología de forma conjunta con la técnica de los expertones en el ejemplo de desarrollo de valuación de empresas que será objeto de estudio en el apartado siguiente.

4. MODELO HÍBRIDO DE VALORACIÓN DE EMPRESAS CON INFORMACIÓN LINGÜÍSTICA APLICANDO EXPERTONES Y 2-TUPLAS LINGÜÍSTICAS

Como se planteó en el segundo apartado, los diversos criterios para la valoración de empresas precisan la estimación tanto de los tipos de interés como de los beneficios esperados que, en ambos casos, se caracterizan por hacer referencia al futuro. De ahí que no resulte fácil

disponer de información numérica de carácter cierto para proceder a la valuación, lo que implica la necesidad de acudir a opiniones que puedan proporcionar expertos sobre el comportamiento futuro de ambas variables. Por tanto, el proceso de obtención de información para establecer el valor esperado de la empresa implica la necesidad de habilitar mecanismos que faciliten a las personas emitir su opinión sobre los valores estimados, de ahí que en el desarrollo del presente trabajo se establezca la posibilidad por parte del experto de expresarse en valores lingüísticos, facilitando asimismo la elección por parte de cada experto de escoger el dominio lingüístico que le resulte más cómodo para ofrecer su valoración.

De esta forma, a continuación se tratará de realizar un análisis del modelo planteado en su aplicación tanto para la evaluación de los tipos de interés como de los beneficios esperados, en aras a facilitar el proceso de valoración de empresas. Con la finalidad de proporcionar un mejor entendimiento del proceso descrito, se desarrolla un ejemplo de ilustración práctica para los dos campos de estudio.

4.1. Estimación de tipos de interés futuros

El proceso de estimación de los tipos de interés suele comenzar con un análisis que permita considerar los posibles tramos entre los que se espera fluctúe el tipo de interés para los periodos que se van a considerar en el estudio, de forma que éstos sirvan de punto de inicio en el proceso de negociación entre las partes intervinientes en el mismo. En el ejemplo de ilustración práctica se ha establecido un periodo de análisis de tres años, para los cuales se han considerado los siguientes tramos para los tipos de interés: $[0.04, 0.05]$, $[0.045, 0.06]$ y $[0.05, 0.06]$.

A fin de consensuar un acuerdo sobre la validez de dicha información,

es factible acudir a varios expertos (en el ejemplo práctico se suponen 10) para que faciliten su conformidad con cada uno de los valores de partida. La solicitud de información a personas, de acuerdo con las consideraciones de los apartados anteriores, debe poder realizarse de forma que cada uno pueda expresarse en los términos que le resulten más habituales; de ahí que no deba imponerse el dominio de expresión, sino que se deba facilitar la obtención de información con independencia del dominio elegido por cada experto. Para la resolución del problema se parte de que cada experto emite su opinión en el conjunto lingüístico que más fácil le resulte entre los tres siguientes:

$$\begin{aligned} S^5 &= \{ MA, A, M, B, MB \} & S^7 &= \{ MA, BA, A, M, B, BB, MB \} \\ S^9 &= \{ PS, MA, BA, A, M, B, BB, MB, PN \} \end{aligned} \quad 5.$$

donde el superíndice indica el número de etiquetas del conjunto lingüístico y cuya semántica asociada es la siguiente:

$$S^5 = \{ MA=Muy_Alta, A=Alta, M=Media, B=Baja, MB=Muy_Baja \}$$

$$S^7 = \{ MA=Muy_Alta, A=Alta, BA=Bastante_Alta, M=Media, B=Baja, BB=Bastante_Baja, B=Muy_Baja \}$$

$$S^9 = \{ PS=Prácticamente_Seguro, MA=Muy_Alta, A=Alta, BA=Bastante_Alta, M=Media, B=Baja, BB=Bastante_Baja, MB=Muy_Baja, PN=Prácticamente_Nulo \}$$

No obstante lo anterior, es posible que las opiniones de los expertos no se ajusten con exactitud a ninguna de las etiquetas anteriores, de forma que se debe establecer la posibilidad de que su respuesta venga establecida por un par de etiquetas dentro de cada dominio.

En base a lo anterior, a efectos ilustrativos se supone que la información obtenida de los expertos es la que recoge la **Tabla 1**.

Experto	[0.04, 0.05]	[0.045, 0.06]	[0.05, 0.06]	Dominio
e_1	A – MA	MA	B – M	S^5
e_2	A – BA	A – MA	MB – M	S^7
e_3	BA	PS	PN – B	S^9
e_4	A	MA – PS	BB – M	S^9
e_5	A – MA	A – MA	B	S^5
e_6	MA	A	MB – B	S^5
e_7	PS	A – MA	BB – M	S^9
e_8	A – MA	A – BA	A – MA	S^9
e_9	MA	BB – B	A – BA	S^7
e_{10}	PN – MB	A – BA	BA – PS	S^9

Tabla 1. Valuaciones lingüísticas suministradas por los expertos

En consecuencia, los datos disponibles para afrontar la decisión se encuentran expresados mediante información lingüística con diferentes granularidades, por lo que será preciso unificar dicha información en un único dominio de expresión utilizando la función de transformación.

En la situación planteada, los dominios quedarán definidos como:

$$\begin{array}{cccccc}
 e_1 & 1(1,5) & e_2 & 1(2,7) & e_3 & 1(3,9) & e_4 & 1(3,9) & e_5 & 1(1,5) \\
 e_6 & 1(1,5) & e_7 & 1(3,9) & e_8 & 1(3,9) & e_9 & 1(2,7) & e_{10} & 1(3,9)
 \end{array}
 \quad 6.$$

de forma que las valoraciones establecidas por cada experto se pueden representar en base al dominio que el mismo utiliza (Tabla 2).

Para proceder a la normalización de las valoraciones establecidas por los expertos, es necesario determinar el conjunto de términos lingüísticos que se va a utilizar como base.

Por razones prácticas, y dado que la mayoría de los expertos en el ejemplo utilizan el dominio l(3,9), será éste el que se utilice como referencia a efectos de unificación, si bien es posible elegir otro cualquiera. De esta forma, por ejemplo para el primer experto (e_1) y su etiqueta B (Baja) se aplica la función de transformación:

$$(s_1^5, 0) \rightarrow TF_3^1(s_1^5, 0) = \Delta \left(\frac{\Delta^{-1}(s_1^5, 0) \cdot (9-1)}{(5-1)} \right) = \Delta(2) = (s_2^9, 0)$$

De forma análoga se normaliza la información suministrada por el resto de expertos (Tabla 3).

Experto	[0.04, 0.05]	[0.045, 0.06]	[0.05, 0.06]
e_1	$S_3^5 - S_4^5$	S_4^5	$S_1^5 - S_2^5$
e_2	$S_4^7 - S_5^7$	$S_4^7 - S_6^7$	$S_0^7 - S_3^7$
e_3	S_6^9	S_8^9	$S_0^9 - S_3^9$
e_4	S_5^9	$S_7^9 - S_8^9$	$S_2^9 - S_4^9$
e_5	$S_3^5 - S_4^5$	$S_3^5 - S_4^5$	S_1^5
e_6	S_4^5	S_3^5	$S_0^5 - S_1^5$
e_7	S_8^9	$S_5^9 - S_7^9$	$S_2^9 - S_4^9$
e_8	$S_5^9 - S_7^9$	$S_5^9 - S_6^9$	$S_5^9 - S_7^9$

e_9	S_6^7	$S_1^7 - S_2^7$	$S_4^7 - S_5^7$
e_{10}	$S_0^9 - S_1^9$	$S_5^9 - S_6^9$	$S_6^9 - S_8^9$

Tabla 2. Valuaciones lingüísticas representadas en cada dominio

	[0.04, 0.05]	[0.045, 0.06]	[0.05, 0.06]
e_1	$(S_6^9, 0) - (S_8^9, 0)$	$(S_8^9, 0)$	$(S_2^9, 0) - (S_4^9, 0)$
e_2	$(S_3^9, 0.33) - (S_7^9, -0.33)$	$(S_3^9, 0.33) - (S_8^9, 0)$	$(S_0^9, 0) - (S_4^9, 0)$
e_3	$(S_6^9, 0)$	$(S_8^9, 0)$	$(S_0^9, 0) - (S_3^9, 0)$
e_4	$(S_5^9, 0)$	$(S_7^9, 0) - (S_8^9, 0)$	$(S_2^9, 0) - (S_4^9, 0)$
e_5	$(S_6^9, 0) - (S_8^9, 0)$	$(S_6^9, 0) - (S_8^9, 0)$	$(S_2^9, 0)$
e_6	$(S_8^9, 0)$	$(S_6^9, 0)$	$(S_0^9, 0) - (S_2^9, 0)$
e_7	$(S_8^9, 0)$	$(S_5^9, 0) - (S_7^9, 0)$	$(S_2^9, 0) - (S_4^9, 0)$
e_8	$(S_5^9, 0) - (S_7^9, 0)$	$(S_5^9, 0) - (S_6^9, 0)$	$(S_5^9, 0) - (S_7^9, 0)$
e_9	$(S_8^9, 0)$	$(S_1^9, 0.33) - (S_3^9, -0.33)$	$(S_5^9, 0.33) - (S_7^9, -0.33)$
e_{10}	$(S_0^9, 0) - (S_1^9, 0)$	$(S_5^9, 0) - (S_6^9, 0)$	$(S_6^9, 0) - (S_8^9, 0)$

Tabla 3. Valuaciones unificados de las valuaciones lingüísticas

Con la información representada en 2-tuplas lingüísticas, unificada en un mismo dominio de expresión, se puede proceder al proceso de agregación de dicha información, consistente en obtener un valor que

represente el conjunto de valores (el conjunto de opiniones) que se desean agregar. El resultado del proceso aplicado a un conjunto de 2-tuplas vendrá establecido también en una 2-tupla, con independencia del criterio elegido para proceder a la agregación.

En el desarrollo del presente trabajo se ha optado por aplicar la metodología de los expertos (Kaufmann, 1987; Kaufmann y Gil Aluja, 1993), utilizando las distintas 2-tuplas lingüísticas obtenidas tras el proceso de normalización y unificación de la información con diferentes granularidades recogida en la Tabla 3 anterior. A partir de dichos datos es posible obtener las correspondientes estadísticas y los expertos (Tabla 4).

A partir de la información anterior se determinan los R^+ -expertos, procediéndose como se refleja en la Tabla 5 para el primer periodo. El resto de periodos se realiza de la misma forma.

En los valores obtenidos se puede calcular la esperanza matemática que será:

$$(i_1) = [0.04610, 0.04720] \quad (i_1) = [0.05632, 0.05836] \quad (i_1) = [0.05289, 0.05544]$$

lo que permite establecer la opinión agregada de los expertos obteniendo estimaciones para los tipos de interés más ajustada que las inicialmente consideradas.

[0.04, 0.05]		[0.045, 0.06]		[0.05, 0.06]	
Estadística	Experton	Estadística	Experton	Estadística	Experton
$(S_0^g, 0)$	1 0 0.9 1.0	$(S_0^g, 0)$	0 0 1.0 1.0	$(S_0^g, 0)$	3 0 0.7 1.0
$(S_1^g, 0)$	0 1 0.9 1.0	$(S_1^g, 0)$	0 0 1.0 1.0	$(S_1^g, 0)$	0 0 0.7 1.0
$(S_2^g, 0)$	0 0 0.9 0.9	$(S_1^g, 0.33)$	1 0 1.0 1.0	$(S_2^g, 0)$	4 2 0.7 1.0
$(S_3^g, 0)$	0 0 0.9 0.9	$(S_2^g, 0)$	0 0 0.9 1.0	$(S_3^g, 0)$	0 1 0.3 0.8
$(S_4^g, 0)$	0 0 0.9 0.9	$(S_3^g, -0.33)$	0 1 0.9 1.0	$(S_4^g, 0)$	0 4 0.3 0.7
$(S_5^g, 0)$	2 1 0.9 0.9	$(S_3^g, 0)$	0 0 0.9 0.9	$(S_5^g, 0)$	1 0 0.3 0.3
$(S_5^g, 0.33)$	1 0 0.7 0.8	$(S_4^g, 0)$	0 0 0.9 0.9	$(S_5^g, 0.33)$	1 0 0.2 0.3
$(S_6^g, 0)$	3 1 0.6 0.8	$(S_5^g, 0)$	3 0 0.9 0.9	$(S_6^g, 0)$	1 0 0.1 0.3
$(S_7^g, -0.33)$	0 1 0.3 0.7	$(S_5^g, 0.33)$	1 0 0.6 0.9	$(S_7^g, -0.33)$	0 1 0.0 0.3
$(S_7^g, 0)$	0 1 0.3 0.6	$(S_6^g, 0)$	2 3 0.5 0.9	$(S_7^g, 0)$	0 1 0.0 0.2
$(S_8^g, 0)$	3 5 0.3 0.5	$(S_7^g, 0)$	1 1 0.3 0.6	$(S_8^g, 0)$	0 1 0.0 0.1
		$(S_8^g, 0)$	2 5 0.2 0.5		

Tabla 4. Estadísticas y expertones

	$(S_0^g, 0)$	0.90 1.00		$(S_0^g, 0)$	0.049 0.050
	$(S_1^g, 0)$	0.90 1.00		$(S_1^g, 0)$	0.049 0.050
	$(S_2^g, 0)$	0.90 0.90		$(S_2^g, 0)$	0.049 0.049
	$(S_3^g, 0)$	0.90 0.90		$(S_3^g, 0)$	0.049 0.049
	$(S_4^g, 0)$	0.90 0.90		$(S_4^g, 0)$	0.049 0.049
0.04 + (0.05 - 0.04) (-)	$(S_5^g, 0)$	0.90 0.90	=	$(S_5^g, 0)$	0.049 0.049
	$(S_5^g, 0.33)$	0.70 0.80		$(S_5^g, 0.33)$	0.047 0.048
	$(S_6^g, 0)$	0.06 0.80		$(S_6^g, 0)$	0.046 0.048
	$(S_7^g, -0.33)$	0.30 0.70		$(S_7^g, -0.33)$	0.043 0.047
	$(S_7^g, 0)$	0.30 0.60		$(S_7^g, 0)$	0.043 0.046
	$(S_8^g, 0)$	0.30 0.50		$(S_8^g, 0)$	0.043 0.045
	Experton			R+-experton	

Tabla 5. R+-expertones para el primer periodo

En caso de que se considere necesario proceder a una parametrización de los datos suministrados por los expertos, debido al inconveniente que plantea esta metodología en cuanto a la traslación de los intervalos obtenidos hacia los extremos superiores, se podría operar, teniendo en consideración la identificación parametrizada de Sugeno (1974):

$$i^{(\lambda)} = \frac{i}{1 + (1 - i)\lambda}, \quad \lambda \in]-1, \infty) \quad 7.$$

La expresión (9) precisa determinar el valor del parámetro λ que a efectos ilustrativos se estima bastará considerar $\lambda \in [0, 1]$. En concreto, para la resolución del ejemplo se establece un valor de $\lambda = 0.5$. La parametrización para obtener $\varepsilon\left(\tilde{i}^{(\lambda=0.5)}\right)$ se realizará nivel por nivel para cada 2-tupla obtenida en el expertón, de forma que para el primer periodo se tendrá el resultado de la Tabla 6.

La esperanza matemática del expertón parametrizado será igual a $[0.5561, 0.6665]$, de forma que se podrán estimar los intereses correspondientes al primer periodo de análisis como sigue a continuación:

$$\varepsilon\left(\tilde{i}^{(\lambda=0.5)}\right) = 0.04 + (0.05)(\cdot) [0.5561, 0.6665] = [0.04556, 0.04666]$$

Operando de forma análoga para los intereses de los dos periodos siguientes se obtienen los siguientes resultados para los tres tramos: $[0.04556, 0.04666]$, $[0.05552, 0.05781]$, $[0.05233, 0.05485]$.

$(S_0^g, 0)$	0.90 1.00	$(S_0^g, 0)$	0.857 1.000
$(S_1^g, 0)$	0.90 1.00	$(S_1^g, 0)$	0.857 1.000
$(S_2^g, 0)$	0.90 0.90	$(S_2^g, 0)$	0.857 0.857
$(S_3^g, 0)$	0.90 0.90	$(S_3^g, 0)$	0.857 0.857
$(S_4^g, 0)$	0.90 0.90	$(S_4^g, 0)$	0.857 0.857
$(S_5^g, 0)$	0.90 0.90 =	$(S_5^g, 0)$	0.857 0.857
$(S_3^g, 0.33)$	0.70 0.80	$(S_3^g, 0.33)$	0.609 0.727
$(S_6^g, 0)$	0.06 0.80	$(S_6^g, 0)$	0.500 0.727
$(S_7^g, -0.33)$	0.30 0.70	$(S_7^g, -0.33)$	0.222 0.609
$(S_7^g, 0)$	0.30 0.60	$(S_7^g, 0)$	0.222 0.500
$(S_8^g, 0)$	0.30 0.50	$(S_8^g, 0)$	0.222 0.400

Expertón
R⁺-expertón

Tabla 6. Parametrización de los datos del primer periodo

4.2. Estimación de los beneficios futuros

El proceso de valuación de la empresa, tal como se indicó con anterioridad, precisa establecer unos valores sobre los que compradores y vendedores se encuentren de acuerdo, respecto a los posibles beneficios a obtener en los periodos considerados en dicho proceso. Para ello, en primer término cabe partir de unos intervalos

para la cuantificación de los beneficios que servirán de referencia para solicitar la opinión de expertos en la materia establecidos tanto por la parte compradora como por la vendedora. A efectos operativos de la resolución práctica se han establecido los siguientes intervalos indicativos de los posibles beneficios para los tres periodos de análisis:

$$B_{\sim 1} = [4.000, 6.000] \quad B_{\sim 2} = [3.000, 6.000] \quad B_{\sim 3} = [2.000, 5.000]$$

A partir de las estimaciones anteriores, cabe solicitar la colaboración de un grupo de expertos, en concreto en el ejemplo 5, para que emitan su opinión mediante evaluaciones lingüísticas. Con objeto de facilitar la obtención de esta información, de forma análoga a lo anterior, se permite que cada experto se exprese en el dominio que le sea más factible.

De esta forma, y suponiendo las opiniones de la Tabla 7, es posible representar dicha información en función del dominio que utiliza cada experto (como se recoge en también en dicha Tabla). El proceso de normalización de esta información en un único dominio de expresión se realizará de forma similar a lo analizado en el apartado anterior, utilizando como dominio $l(3,9)$, dando como resultado el de la Tabla 8.

Compradores		[4000, 6000]		[3000, 6000]		[2000, 5000]	
e_1	S^5	M - A	$(S_2^5, 0) - (S_3^5, 0)$	B - M	$(S_1^5, 0) - (S_2^5, 0)$	B - M	$(S_1^5, 0) - (S_2^5, 0)$
e_2	S^7	BB - M	$(S_1^7, 0) - (S_3^7, 0)$	M - BA	$(S_3^7, 0) - (S_5^7, 0)$	MB - M	$(S_0^7, 0) - (S_3^7, 0)$
e_3	S^9	A	$(S_5^9, 0)$	MB - BB	$(S_1^9, 0) - (S_2^9, 0)$	PN - B	$(S_0^9, 0) - (S_3^9, 0)$
e_4	S^9	A	$(S_5^9, 0)$	A - BA	$(S_5^9, 0) - (S_6^9, 0)$	BB - M	$(S_2^9, 0) - (S_4^9, 0)$
e_5	S^5	B - M	$(S_1^5, 0) - (S_2^5, 0)$	M - A	$(S_2^5, 0) - (S_3^5, 0)$	B	$(S_1^5, 0)$
Vendedores		[4000, 6000]		[3000, 6000]		[2000, 5000]	
e_1	S^7	BA - MA	$(S_5^7, 0) - (S_6^7, 0)$	M - A	$(S_3^7, 0) - (S_4^7, 0)$	A - BA	$(S_4^7, 0) - (S_5^7, 0)$
e_2	S^9	M - BA	$(S_4^9, 0) - (S_6^9, 0)$	MA - PS	$(S_7^9, 0) - (S_8^9, 0)$	B - M	$(S_3^9, 0) - (S_4^9, 0)$
e_3	S^5	M - A	$(S_2^5, 0) - (S_3^5, 0)$	A	$(S_3^5, 0)$	B - M	$(S_1^5, 0) - (S_2^5, 0)$
e_4	S^5	B - A	$(S_1^5, 0) - (S_3^5, 0)$	B - M	$(S_1^5, 0) - (S_2^5, 0)$	B - A	$(S_1^5, 0) - (S_3^5, 0)$
e_5	S^9	A - BA	$(S_5^9, 0) - (S_6^9, 0)$	MA - PS	$(S_7^9, 0) - (S_8^9, 0)$	BA - MA	$(S_6^9, 0) - (S_7^9, 0)$

Tabla 7. Valuaciones lingüísticas y su 2-tupla para los beneficios futuros

Compradores	[4000, 6000]	[3000, 6000]	[2000, 5000]
e_1	$(S_4^g, 0) - (S_6^g, 0)$	$(S_2^g, 0) - (S_4^g, 0)$	$(S_2^g, 0) - (S_4^g, 0)$
e_2	$(S_1^g, 0.33) - (S_4^g, 0)$	$(S_4^g, 0) - (S_7^g, -0.33)$	$(S_0^g, 0) - (S_4^g, 0)$
e_3	$(S_5^g, 0)$	$(S_1^g, 0) - (S_2^g, 0)$	$(S_0^g, 0) - (S_3^g, 0)$
e_4	$(S_5^g, 0)$	$(S_5^g, 0) - (S_6^g, 0)$	$(S_2^g, 0) - (S_4^g, 0)$
e_5	$(S_2^g, 0) - (S_4^g, 0)$	$(S_4^g, 0) - (S_6^g, 0)$	$(S_2^g, 0)$
Vendedores	[4000, 6000]	[3000, 6000]	[2000, 5000]
e_1	$(S_7^g, -0.33) - (S_8^g, 0)$	$(S_4^g, 0) - (S_5^g, 0.33)$	$(S_5^g, 0.33) - (S_7^g, -0.33)$
e_2	$(S_4^g, 0) - (S_6^g, 0)$	$(S_7^g, 0) - (S_8^g, 0)$	$(S_3^g, 0) - (S_4^g, 0)$
e_3	$(S_4^g, 0) - (S_6^g, 0)$	$(S_6^g, 0)$	$(S_2^g, 0) - (S_4^g, 0)$
e_4	$(S_2^g, 0) - (S_6^g, 0)$	$(S_2^g, 0) - (S_4^g, 0)$	$(S_2^g, 0) - (S_6^g, 0)$
e_5	$(S_5^g, 0) - (S_6^g, 0)$	$(S_7^g, 0) - (S_8^g, 0)$	$(S_6^g, 0) - (S_7^g, 0)$

Tabla 8. Valuaciones lingüísticas normalizadas

A continuación se agrega la información unificada, obteniendo un valor que represente el conjunto de opiniones recogidas de los distintos expertos. A este respecto, se procede a realizar la agregación, siguiendo la misma metodología aplicada en el caso de la estimación de tipo de interés en función de las opiniones de los expertos.

Igualmente, será posible establecer los expertones para cada una de las

2-tuplas obtenidas (en la Tabla 9 para los compradores).

[4000, 6000]				[3000, 6000]				[2000, 5000]						
Estadística	Expertón			Estadística	Expertón			Estadística	Expertón					
$(S_0^g, 0)$	0	0	1.00	1.00	$(S_0^g, 0)$	0	0	1.00	1.00	$(S_0^g, 0)$	2	0	0.60	1.00
$(S_1^g, 0)$	0	0	1.00	1.00	$(S_1^g, 0)$	1	0	1.00	1.00	$(S_1^g, 0)$	0	0	0.60	1.00
$(S_1^g, 0.33)$	1	0	1.00	1.00	$(S_2^g, 0)$	1	1	0.80	1.00	$(S_2^g, 0)$	3	1	0.60	1.00
$(S_2^g, 0)$	1	0	0.80	1.00	$(S_3^g, 0)$	0	0	0.60	0.80	$(S_3^g, 0)$	0	1	0.00	0.80
$(S_3^g, 0)$	0	0	0.60	1.00	$(S_4^g, 0)$	2	1	0.60	0.80	$(S_4^g, 0)$	0	3	0.00	0.60
$(S_4^g, 0)$	1	2	0.60	1.00	$(S_5^g, 0)$	1	0	0.20	0.60	$(S_5^g, 0)$	0	0	0.00	0.00
$(S_5^g, 0)$	2	2	0.40	0.60	$(S_6^g, 0)$	0	2	0.00	0.60	$(S_6^g, 0)$	0	0	0.00	0.00
$(S_6^g, 0)$	0	1	0.00	0.20	$(S_7^g, -0.33)$	0	1	0.00	0.20	$(S_7^g, 0)$	0	0	0.00	0.00
$(S_7^g, 0)$	0	0	0.00	0.00	$(S_7^g, 0)$	0	0	0.00	0.00	$(S_8^g, 0)$	0	0	0.00	0.00
$(S_8^g, 0)$	0	0	0.00	0.00	$(S_8^g, 0)$	0	0	0.00	0.00					

Tabla 9. Estadísticas y expertones para los compradores

La información anterior permite obtener los R^+ -expertones, si bien con la finalidad de no reiterar los cálculos, se realizan solamente las operaciones correspondientes al primer período. En concreto se ha obtenido para los compradores los resultados reflejados en Tabla 10.

	(S_0^g, θ)	1.00 1.00	(S_0^g, θ)	6.000 6.000
	(S_1^g, θ)	1.00 1.00	(S_1^g, θ)	6.000 6.000
	$(S_1^g, 0.33)$	1.00 1.00	$(S_1^g, 0.33)$	6.000 6.000
	(S_2^g, θ)	0.80 1.00	(S_2^g, θ)	5.600 6.000
	(S_3^g, θ)	0.60 1.00	(S_3^g, θ)	5.200 6.000
4.000 + (6.000 - 4.000) (·)	(S_4^g, θ)	0.60 1.00	= (S_4^g, θ)	5.200 6.000
	(S_5^g, θ)	0.40 0.60	(S_5^g, θ)	4.800 5.200
	(S_6^g, θ)	0.00 0.20	(S_6^g, θ)	4.000 4.400
	(S_7^g, θ)	0.00 0.00	(S_7^g, θ)	4.000 4.000
	(S_8^g, θ)	0.00 0.00	(S_8^g, θ)	4.000 4.000
	Expertón		R ⁺ -expertón	

Tabla 10. R⁺-expertones para los compradores

Las esperanzas matemáticas de los expertones anteriores son [0.489, 0.644] y [0.489, 0.711] respectivamente, de forma que se tiene que:

$$\varepsilon \left(\tilde{B}_1^{(C)} \right) = 4.000 + (6.000 - 4.000)(\cdot) [0.489, 0.644] = [4.978, 5.288]$$

$$\varepsilon \left(\tilde{B}_1^{(V)} \right) = 4.000 + (6.000 - 4.000)(\cdot) [0.489, 0.711] = [4.978, 5.422]$$

Para el resto de periodos, las esperanzas matemáticas de los expertos de los compradores son [0.356, 0.556] y [0.150, 0.425] y para los vendedores [0.578, 0.711] y [0.380, 0.580], lo que permite operar en el siguiente sentido:

$$\varepsilon\left(\tilde{B}_2^{(C)}\right)=3.000+(6.000-3.000)(\cdot)[0.356, 0.556]=[4.068, 4.668]$$

$$\varepsilon\left(\tilde{B}_2^{(V)}\right)=3.000+(6.000-3.000)(\cdot)[0.578, 0.711]=[4.734, 5.133]$$

$$\varepsilon\left(\tilde{B}_3^{(C)}\right)=2.000+(5.000-2.000)(\cdot)[0.150, 0.425]=[2.450, 3.275]$$

$$\varepsilon\left(\tilde{B}_3^{(V)}\right)=2.000+(5.000-2.000)(\cdot)[0.380, 0.580]=[3.140, 3.740]$$

Los procedimientos anteriores permiten obtener valores más aproximados entre las opiniones de compradores y vendedores, reduciéndose la distancia entre los extremos de los intervalos propuestos. Así, en un acercamiento inicial, para el primer periodo, la opinión agregada de los expertos compradores establecen un valor mínimo en 4.978 que, en este caso resulta coincidente con el expresado por la posición vendedora. Por su parte, los vendedores establecen una valoración máxima de 5.422, de forma que se tendría un nuevo intervalo [4.978, 5.288], en el que se encontrarían todas las opiniones emitidas por los expertos.

Por tanto, el proceso anterior permite establecer un punto de encuentro que pueda servir de base para el proceso negociador, si bien pudiera ser necesario una nueva intervención de los expertos para el intervalo

obtenido. En este caso, se procederá de forma análoga a lo realizado con los intervalos iniciales, lo que permitirá reducir de nuevo la incertidumbre al disminuir la base del intervalo que se obtendría.

Asimismo si se considerada preciso proceder a la traslación del resultado obtenido sería posible proceder a un proceso de parametrización, de forma similar al realizado en el caso de los tipos de interés.

No obstante lo anterior, al objeto de facilitar la resolución del ejemplo planteado se aceptan como válidos los resultados obtenidos en el primer proceso, utilizando por tanto dicha información para el proceso de cálculo del valor de la empresa.

4.3. Cálculo del valor total de la empresa

En el primer apartado del presente trabajo se ha establecido la fórmula (1) como base para la estimación del valor de la empresa. Dicha formulación anterior se puede simplificar con la siguiente nomenclatura:

$$I_1^{-1} = (1 + i_1)^{-1}; I_2^{-1} = (1 + i_1)^{-1} (i + i_2)^{-1}; I_3^{-1} = (1 + i_1)^{-1} (i + i_2)^{-1} (i + i_3)^{-1}$$

lo que permite formular la expresión del valor de la empresa de la forma siguiente:

$$V_e = \frac{V_s + B_1 \cdot I_1^{-1} + B_2 \cdot I_2^{-1} + B_3 \cdot I_3^{-1}}{1 + i_1 \cdot I_1^{-1} + i_2 \cdot I_2^{-1} + i_3 \cdot I_3^{-1}}$$

Por tanto, para establecer el valor de la empresa es preciso disponer de información sobre el valor sustancial (V_s) que es posible determinar de acuerdo con los criterios comúnmente aceptados. En cualquier caso dicha información es posible determinarla asimismo en términos inciertos, mediante un intervalo que defina el posible valor asignado. No obstante, y a fin de no reiterar procesos de cálculo, a los efectos del presente trabajo se asume que dicho valor es conocido y aceptado en un importe de 3.000 unidades monetarias. Igualmente, la información que se posee por tanto a efectos de proceder a la estimación del valor de la empresa es la siguiente:

$$V_s = 3.000$$

$$\tilde{i}_1 = [0.04556, 0.04666] \quad \tilde{i}_2 = [0.05552, 0.05781] \quad \tilde{i}_3 = [0.05233, 0.05485]$$

$$\tilde{B}_1 = [4.978, 5.422] \quad \tilde{B}_2 = [4.068, 5.133] \quad \tilde{B}_3 = [2.450, 3.740]$$

La información sobre los tipos de interés permiten obtener los correspondientes tipos de actualización (nuevamente se realiza solamente para el primer periodo:

$$\left(1 + i_{\sim 1}\right)^{-1} = (1 + i)[0.04556, 0.04666]^{-1} = \left[\frac{1}{1.04666}, \frac{1}{1.04556}\right] = [0.9554, 0.9564]$$

$$\text{que permite establecer: } I_{\sim 1}^{-1} = \left(1 + i_{\sim 1}\right)^{-1} = [0.9554, 0.9564]$$

El proceso de obtención de los tipos de interés y de los beneficios actualizados para cada uno de los periodos de análisis considerado en el ejemplo numérico, se realiza en base a los cálculos siguientes:

$$\tilde{B}_1 (\cdot) \tilde{I}_1^{-1} = [4.978, 5.422](\cdot)[0.9554, 0.9564] = [4.756, 5.186]$$

$$\tilde{B}_1 (\cdot) \tilde{\Gamma}_2^{-1} = [4.068, 5.133](\cdot)[0.9031, 0.9061] = [3.673, 4.651]$$

$$\tilde{B}_3 (\cdot) \tilde{\Gamma}_3^{-1} = [2.450, 3.740](\cdot)[0.8561, 0.8610] = [2.098, 3.220]$$

$$\tilde{\Gamma}_1 (\cdot) \Gamma_1^{-1} = [0.04556, 0.04666](\cdot)[0.9554, 0.9564] = [0.0435, 0.0446]$$

$$\tilde{\Gamma}_2 (\cdot) \tilde{\Gamma}_2^{-1} = [0.05552, 0.05781](\cdot)[0.9031, 0.9061] = [0.0501, 0.0524]$$

$$\tilde{\Gamma}_1 (\cdot) \tilde{\Gamma}_1^{-1} = [0.05233, 0.05485](\cdot)[0.8561, 0.8610] = [0.0448, 0.0472]$$

De forma que, sustituyendo en la fórmula, se puede obtener finalmente el valor de la empresa para los valores del ejemplo ilustrativo desarrollado, en los términos en los que se ha establecido su cálculo en el presente trabajo:

$$V_e = \frac{3.000(+)[10.527, 13.057]}{1(+)[0.1384, 0.1442]} = \left[\frac{13.527}{1.1442}, \frac{16.057}{1.1384} \right] = [11.822, 14.105]$$

El resultado anterior permite constatar que el beneficio no será inferior a 11.822 ni superará las 14.105 unidades monetarias. La amplitud del intervalo deberá ser objeto de negociación entre las partes, si bien si se considerara necesaria una menor base de incertidumbre sería posible recurrir al contraexpertizaje hasta que dicha incertidumbre pueda ser negociada entre compradores y vendedores.

5. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos con el presente trabajo permiten comprobar en primer término la validez de la representación mediante 2-tuplas para el tratamiento de la información lingüística.

Asimismo se pone de manifiesto la ventaja de este tipo de representación frente a los modelos basados en el principio de extensión y a los modelos simbólicos en la representación de soluciones obtenidas en contextos con diferentes granularidades en el dominio de expresión original utilizado por los expertos o personas que suministran la información para afrontar un proceso de decisión. Por otra parte, el desarrollo práctico efectuado ha permitido constatar la validez de la técnica de los expertones en su utilización conjunta con la representación mediante 2-tuplas lingüísticas, frente a los operadores tradicionales de agregación de información para este tipo de representación.

En su aplicación al problema de valoración de empresas, la utilización conjunta de ambas técnicas permite el tratamiento de la información suministrada por expertos de cada una de las partes (compradora y vendedora) que pueda facilitar el proceso de consenso en este tipo de operaciones, tratando de modificar lo menos posible la información inicial y procurando facilitar la obtención de este tipo de información en el lenguaje natural inherente a los seres humanos.

REFERENCIAS

- [1] Delgado, M., Verdegay, J.L.; Vila, M.A. (1993). "Linguistic Decision Making Models". *International Journal Intelligent Systems* 7, pp. 479-492.
- [2] Gil Lafuente, A.M. (2001). *Nuevas estrategias para el análisis financiero en la empresa*. Barcelona. Ariel Economía.
- [3] Herrera, F.; Herrera-Viedma, E. (1997). "Aggregation Operators for Linguistic Weighted Information". *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics, Systems and Humans* 5 (27), pp. 646-656.

- [4] Herrera, F.; Herrera-Viedma, E.; Verdegay, J.L. (1996). "A Model of Consensus in Group Decision Making Under Linguistic Assessments". *Fuzzy Sets and Systems* 79, pp. 73-87.
- [5] Herrera, F.; Martínez, L. (1999). "A 2-tuple Linguistic Representation Model for Computing with Words". *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 8, pp. 746-752.
- [6] Herrera, F.; Martínez, L. (2000). "A Fusion Approach for Managing Multi-Granularity Linguistic Terms Sets in Decision Making". *Fuzzy Sets and Systems* 114, pp. 43-58.
- [7] Kaufmann, A. (1987). *Les Expertons*. París. Hermes.
- [8] Kaufmann, A.; Gil Aluja, J. (1992). *Técnicas de Gestión de Empresa. Previsiones, Decisiones; Estrategias*. Madrid. Pirámide.
- [9] Kaufmann, A.; Gil Aluja, J. (1993). *Técnicas especiales para la gestión de expertos*. Vigo. Milladoiro.
- [10] Klir, G.J.; Yuan, B. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Upper Saddle River. Prentice Hall.
- [11] López González, E.; Mendaña Cuervo, C. (2003): "The aggregation linguistic information for decision making based on expertons and 2-tuples". *Fuzzy Economic Review VIII (2)*, pp. 39-53.
- [12] Tong, M.; Bonissone, P.P. (1980). "A Linguistic Approach to Decision Making with Fuzzy Sets". *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 10, pp. 716-723.
- [13] Yager, R.R. (1992). Fuzzy Screening Systems, en R. Lowen [ed.]: *Fuzzy Logic: State of the Art*. Boston. Kluwer Academic Publishers, pp. 251-262.

- [14] Zadeh, L.A. (1975). "The Concept of a Linguistic Variable and its Applications to Approximate reasoning". *Information Sciences*, Parte 1 (8), pp. 199-249, Parte II (8), pp. 301-357, Parte III (9), pp. 43-80.
- [15] Zadeh, L.A. (1983). "A Computational Approach to Fuzzy Quantifiers in Natural Languages". *Computers and Mathematics with Applications* 9, pp. 149-184.