Cuadernos del CIMBAGE Nº 9 (2007) 37-57

RESOLUCIÓN DE EQUIVALENCIAS FINANCIERAS MEDIANTE ECUACIONES CON COEFICIENTES BORROSOS[1]

Maria Silvia Moriñigo*, Mariano Eriz**
CIMBAGE - Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Buenos Aires
Av. Córdoba 2122 - Ciudad de Buenos Aires - C1120AAQ - Argentina
*msmori@econ.uba.ar, **erizmariano@universia.com.ar

Recibido 1 de febrero de 2007, aceptado 23 de abril de 2007

Resumen

A menudo sólo se conocen estimaciones de las variables financieras. Es usual que con objeto de utilizar modelos clásicos, apreciaciones como “una tasa de entre el 5% y el 7%”, se conviertan en cantidades exactas, como puede ser el promedio entre los valores extremos.

En este trabajo se propone un enfoque más flexible que permite captar la incertidumbre mediante la utilización de algunos elementos de la teoría de los conjuntos borrosos. La imprecisión presente en el capital, interés y/o cantidad de períodos se modela mediante números borrosos triangulares. Al apelar a los enfoques clásicos para evaluar expresiones algebraicas con coeficientes borrosos que hacen uso del principio de extensión y aritmética de α-cortes, se definen las extensiones *fuzzy* de las relaciones financieras elementales.

Se obtienen las versiones *fuzzy* del valor actual y del valor final de un capital borroso y el VAN mediante la resolución de ecuaciones con coeficientes borrosos por el método de α - cortes. Estos desarrollos se aplican a distintos casos de estudio.

Por último, se muestra que no siempre es posible hallar un análogo borroso de la TIR utilizando los métodos clásicos de resolución de ecuaciones con coeficientes borrosos. Se calcula valiéndose de un nuevo concepto de solución.

Palabras clave: variables financieras, incertidumbre, ecuaciones con coeficientes borrosos.

[1] Este trabajo fue realizado en el marco del Proyecto UBACyT E019 “Predicción y toma de decisiones en condiciones de incertidumbre”, de la Programación Científica de la Universidad de Buenos Aires 2004-2007.

RESOLUTION OF FINANCIAL EQUIVALENCES WITH EQUATIONS WITH FUZZY COEFFICIENTS

Maria Silvia Moriñigo*, Mariano Eriz**
CIMBAGE - Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Buenos Aires
Av. Córdoba 2122 - Ciudad de Buenos Aires - C1120AAQ - Argentina
*msmori@econ.uba.ar, **erizmariano@universia.com.ar

Received February 1st 2007, accepted April 23rd 2007

Abstract

Quite often only estimations of financial variables are known. Usually expressions like "a rate between 5% and 7%" are translated into exact amounts, such as the average between the extreme values, in order to use classical techniques.

In this paper we propose a more flexible approach which uses some elements of the theory of fuzzy sets to capture vagueness in the environment. The uncertainty in cash flows, interest or number of periods is modeled by triangular fuzzy numbers.

The fuzzy extensions of elementary financial relations are developed by using the classical procedures to evaluate fuzzy algebraic expressions based on the extension principle and arithmetic of α – cuts.

The fuzzy extensions of present and futures value of a fuzzy amount are obtained by solving fuzzy equations using α - cuts. These developments are applied to cases of study.

Finally, it is shown that it is not always possible to find a fuzzy analogous to the internal rate of return using classical methods to solve fuzzy equations. It is calculated using a new solution concept.

The results of this paper suggest that the application of fuzzy methodology to finance is a good alternative when dealing with uncertainty.

Keywords: Financial variables, Uncertainty, Fuzzy equations

1. INTRODUCCIÓN

Dentro de las ciencias económicas el área de las finanzas ha tenido un tratamiento intenso, riguroso y estimulante durante los últimos cuarenta años. Uno de sus objetos de estudio es cómo hacer una asignación eficiente de los recursos que una empresa tiene a su disposición y desplazarlos en el tiempo en un contexto en general incierto.

Los agentes y las organizaciones claves son las familias o los individuos, las empresas, los intermediarios financieros y los mercados financieros, todos con su carga de subjetividad e incertidumbre.

A menudo sólo se conocen estimaciones de las variables financieras, dado que están inmersas en un ambiente incierto. Es usual que apreciaciones del estilo: "una tasa de entre el 5% y el 7%" o "un flujo futuro de fondos que no supere las 800000 u.m. y no sea menor de 500000 u.m.", se conviertan en valores exactos, como puede ser el promedio entre los extremos, con el fin de utilizar métodos clásicos.

Cuando se usan modelos financieros, como el valor final y el valor actual de un capital, las rentas financieras, el valor actual neto (VAN) y la tasa interna de retorno (TIR), no siempre se conocen todas las variables, por lo que es necesario hallarlas con algún método de resolución de ecuaciones.

En este trabajo se proponen modelos más flexibles que permiten captar la incertidumbre mediante la utilización de algunos elementos de la teoría de los conjuntos borrosos. De esta manera, se brinda al inversor una visión más amplia del entorno en el que se plantea su problema para la toma de decisión.

La incertidumbre presente en el capital, interés y/o cantidad de períodos se modela mediante números borrosos triangulares. Al apelar a los enfoques clásicos para evaluar expresiones algebraicas con coeficientes borrosos que hacen uso del principio de extensión y aritmética de α-cortes, se definen las extensiones *fuzzy* de las relaciones financieras elementales.

A fin de despejar distintas variables financieras, se resuelven ecuaciones con coeficientes borrosos mediante el uso del método de α-cortes. De esta forma, se obtienen las versiones *fuzzy* del valor actual y el valor final de un capital borroso y el VAN. Estos desarrollos se aplican a distintos casos de estudio.

Por último, se muestra que no siempre es posible hallar un análogo borroso de TIR utilizando los métodos clásicos de resolución de ecuaciones con coeficientes borrosos. Para ello se propone otra manera de calcularla, valiéndose de un nuevo concepto de solución.

Los resultados de este trabajo sugieren que la aplicación de metodologías borrosas al área financiera es una buena alternativa cuando se pretende captar la incertidumbre del medio.

2. ALGUNAS CONSIDERACIONES TEÓRICAS[2]

Se recordarán algunos conceptos básicos de cálculo financiero como el valor final y el valor actual de un capital, las rentas financieras, el valor actual neto (VAN) y la tasa interna de retorno (TIR).

Si un capital A se invierte hoy a una tasa efectiva periódica i, el capital acumulado al cabo de un período es $S_1 = A(1+i)$. Se puede demostrar que si dicho capital se invierte por n períodos su *valor final* es $S_n = A(1+i)^n$.

Si el valor final de un capital expuesto a una tasa efectiva i durante un período es S_1, su valor actual es $A = S_1(1+i)^{-1}$. El *valor actual* de un capital expuesto a interés i durante n períodos es $A = S_n(1+i)^{-n}$.

Las rentas financieras más sencillas se caracterizan por tener pagos sucesivos de cuotas en cada período de manera vencida. Dichas cuotas están expuestas a la tasa de interés i y pueden valuarse tanto como valor actual $V_{\overline{n|}i}$ o como valor final $A_{\overline{n|}i}$.

Primero se analizan las rentas con valor actual. Si se tienen n cuotas de valor C expuestas a la tasa efectiva i, la renta es la suma de términos de una progresión geométrica representada por la expresión:

$$V_{\overline{n|}i} = C \cdot (1+i)^{-1} + C \cdot (1+i)^{-2} + \ldots + C \cdot (1+i)^{-n} \qquad (1)$$

(1) puede reducirse mediante la fórmula que se utiliza para sumar los términos de una progresión geométrica, de la que resulta:

$$V_{\overline{n|}i} = C \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad \text{o} \quad V_{\overline{n|}i} = C \cdot \gamma(n;i) \qquad (2)$$

Ahora se analizan las rentas de valor final suponiendo la misma estructura de pago de cuotas del caso anterior.

---

[2] El lector familiarizado con las definiciones de las variables financieras puede obviar este apartado.

Se obtiene:

$$A_{n\rceil i} = C + C \cdot (1+i)^1 + C \cdot (1+i)^2 + \ldots + C \cdot (1+i)^{n-1} \qquad (3)$$

Al aplicar en (3) el mismo recurso que en (1) queda:

$$A_{n\rceil i} = C \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \text{o} \quad A_{n\rceil i} = C \cdot \beta(n;i) \qquad (4)$$

Otra posibilidad consiste en valuar una inversión determinada que requiere de una inversión inicial A_0 y a lo largo de los sucesivos períodos se obtienen flujos de fondos (ingresos menos egresos). Esta situación es similar a la de las rentas financieras valuadas a hoy, debido a que el concepto de *valor actual neto* (VAN) consiste en valuar los flujos de fondos de cada inversión para luego determinar cuál de ellas es la más rentable. Para esto se utiliza la expresión:

$$VAN = -A_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{(1+i)^j} \qquad (5)$$

A_j : flujo de fondos para el período *j*.

Una vez calculado el VAN de cada una de las inversiones consideradas, el criterio de decisión que se utiliza es elegir aquella inversión cuyo VAN sea mayor. Todas las inversiones que den un VAN negativo se descartan.

Al hallar la *tasa interna de retorno* (TIR) se busca la tasa de interés que hace que el valor actual neto sea nulo. En este caso, la tasa es la incógnita.

$$0 = -A_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{(1+i)^j} \qquad (6)$$

3. METODOLOGÍA A APLICAR

De lo expuesto hasta el momento se deduce que la resolución de ecuaciones es una de las técnicas utilizadas para hallar el valor de determinadas variables financieras.

La utilización de conjuntos borrosos permitirá captar la incertidumbre con el objeto de generar modelos con mayor flexibilidad que brinden al inversor un panorama más completo del entorno. Se emplearán ecuaciones con coeficientes borrosos.

3.1. Evaluación de expresiones algebraicas con coeficientes borrosos

Con el objetivo de obtener distintas variables financieras en un ambiente incierto, se resolverán ecuaciones con coeficientes borrosos. Antes de abordar los diferentes métodos de resolución, se revisarán los procedimientos clásicos para evaluar expresiones algebraicas con coeficientes borrosos.

Sea $f : \Re^n \to \Re$, $y = f(x_1,...,x_n)$. Si se sustituyen x_i $1 \le i \le n$ por los respectivos NBT $\tilde{X}_i$ $1 \le i \le n$, se obtiene el conjunto borroso

$$\tilde{Y} = f(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_n) \quad (7)$$

Se proponen dos métodos para evaluar (7).

i. Usando el *Principio de Extensión*

La función de pertenencia de $\tilde{Y}$ es
$\mu_{\tilde{Y}}(y) = \sup\{\pi(x_1,...,x_n) / f(x_1,...,x_n) = y\}$ con $\pi(x_1,...x_n) = \min_{1 \le i \le n}\{\mu_{\tilde{X}_i}(x_i)\}$.

Si $X_\alpha = X_{1_\alpha} \times ... \times X_{n_\alpha}$, sea $\Omega_\alpha = \{y / y = f(x), x \in X_\alpha\}$. Se define el número borroso $\tilde{W}$ por su función de pertenencia $\mu_{\tilde{W}}(y) = \begin{cases} \sup\{\alpha / y \in \Omega_\alpha\} \\ 0 \quad \text{otro caso} \end{cases}$.

Buckley y Qu (1990) prueban que $\tilde{W} = \tilde{Y}$. Además si f es continua, $W_\alpha = \Omega_\alpha = Y_\alpha$, $0 \le \alpha \le 1$.

ii. Usando α - cortes y aritmética de intervalos

Se supone que f es continua para poder utilizar el resultado anterior.

Se calcula Y_α sustituyendo por los intervalos X_{i_α} en la ecuación $y = f(x_1,...,x_n)$.

Sea $V_\alpha = f(X_{1_\alpha},...,X_{n_\alpha})$, determinado mediante el empleo de aritmética de intervalos.

Buckley y Qu (1990) prueban que si f es monótona, entonces $Y_\alpha \subset V_\alpha$. $0 < \alpha \leq 1$.

Cabe observar que en general no se obtendrá $Y_\alpha = V_\alpha$.

Por lo tanto Y_α, el α - corte de la expresión algebraica definido usando el principio de extensión, es un subconjunto propio de V_α que es el resultado de evaluar la expresión usando α - cortes y aritmética de intervalos.

Ejemplo. Sea la función $f(x;a,b) = ax^2 + bx$ y los números borrosos triangulares $\widetilde{A} = (0,1,2)$, $\widetilde{B} = 1$, $\widetilde{X} = (-1,0,1)$.
Los respectivos α - cortes son $A_\alpha = [\alpha;-\alpha+2]$ y $X_\alpha = [\alpha-1;-\alpha+1]$.
Si se toman los α - cortes de nivel 0.5, $A_{0.5} = [0.5;1.5]$ y $X_{0.5} = [-0.5;0.5]$ resulta $\Omega_{0.5} = \{ax^2 + bx / 0.5 \leq a \leq 1.5, b = 1, -0.5 \leq x \leq 0.5\} = [-0.375;0.875]$, porque $0.5^3 - 0.5 \leq ax^2 + bx \leq 1.5(0.5)^2 + 0.5$
$Z_{0.5} = [0.5;1.5][-0.5;0.5][-0.5;0.5] + 1[-0.5;0.5] = [-0.875;0.875]$, porque $[0.5;1.5][-0.5;0.5][-0.5;0.5] + [-0.5;0.5] = [-0.75;0.75][-0.5;0.5] + [-0.5;0.5] =$ $[-0.375;0.375] + [-0.5;0.5] = [-0.875;0.875]$

3.2. Resolución de ecuaciones con coeficientes borrosos
3.2.1. Métodos clásicos

La resolución de ecuaciones con coeficientes borrosos es uno de los problemas de la teoría de conjuntos borrosos que más dificultades presenta. Los métodos clásicos, que se derivan de la utilización del *Principio de Extensión* y de los α - cortes, tienen muchas restricciones. Esto obstaculiza la aplicación de esta teoría a problemas relacionados con economía, finanzas, teoría de decisión, etc.

Si $f : \Re \to \Re$, se considera la ecuación

$$f\left(\widetilde{A}_i, \widetilde{X}\right) = \widetilde{B} \tag{8}$$

donde $\widetilde{A}_i, 1 \leq i \leq n$ son los coeficientes de f y la incógnita $\widetilde{X}$ es un número borroso real.

i. Usando el *Principio de Extensión*
   Sean $S_\alpha^1 = \{f(a_i, x) / x \in X_\alpha, a_i \in A_{i_\alpha}\}$, $X_\alpha = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$ $0 \leq \alpha \leq 1$.

S^1_α es un α-corte de $f\left(\widetilde{A}_i, \widetilde{X}\right)$ definido por el *Principio de Extensión* y, por lo tanto, $S^1_\alpha = [\theta_1(\alpha); \theta_2(\alpha)]$

Resolver (8) significa hallar funciones $x_1(\alpha)$, $x_2(\alpha)$ tales que $S^1_\alpha = B_\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Es decir, se buscan $x_1(\alpha)$, $x_2(\alpha)$ tales que $\theta_i(\alpha) = c_i(\alpha), i = 1,2$.

Sin embargo esta condición no es suficiente para resolver el problema. Para que $\widetilde{X}$ sea un número borroso real debe verificarse además:

a. $x_1(0) < x_1(1) \leq x_2(1) < x_2(0)$

b. $x_1(\alpha)$ es continua y creciente en $[x_1(0), x_1(1)]$

c. $x_2(\alpha)$ es continua y decreciente en $[x_2(1), x_2(0)]$

Si valen todas estas condiciones, los α-cortes $X_\alpha = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$ dan como resultado un número borroso real $\widetilde{X} = \widetilde{X}_e$, solución de (8) que se obtiene empleando el *Principio de Extensión*.

Este concepto de solución presenta dos dificultades: en general es difícil determinar S^1_α y a menudo, aún en casos simples, la solución no existe.

ii. Usando α - cortes

Sea $S^2_\alpha = f\left(A_{i_\alpha}, X_\alpha\right)$ $0 \leq \alpha \leq 1$. $S^2_\alpha = [\phi_1(\alpha); \phi_2(\alpha)]$ es un intervalo cerrado y acotado.

Resolver (8) significa hallar funciones $x_1(\alpha)$, $x_2(\alpha)$ tales que $S^2_\alpha = B_\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Además $x_1(\alpha)$, $x_2(\alpha)$ deben verificar las condiciones a., b., c. para que $\widetilde{X}$ sea un número borroso real. Si existe, se obtiene la solución $\widetilde{X} = \widetilde{X}_c$

A veces $\widetilde{X}_c$ no existe.

Ejemplo. Sea la ecuación $\widetilde{A}.\widetilde{Z} = \widetilde{B}$ con $\widetilde{A} = (1,2,3)$, $\widetilde{B} = (2,6,12)$.

Los respectivos α - cortes son $A_\alpha = [\alpha + 1; -\alpha + 3]$, $B_\alpha = [4\alpha + 2; -6\alpha + 12]$.

Al usar el principio de extensión, se obtiene $W_\alpha = \left[\frac{4\alpha + 2}{\alpha + 1}; \frac{-6\alpha + 12}{-\alpha + 3}\right]$.

Al usar el método de los α - cortes, se obtiene $Z_\alpha = \left[\frac{4\alpha + 2}{\alpha + 1}; \frac{-6\alpha + 12}{-\alpha + 3}\right]$.

3.2.2. Nuevo concepto de solución

Se considera una ecuación con coeficientes borrosos que contiene una única variable.

La ecuación nítida $H(x; a_1,....,a_n) = b$ define implícitamente a x como K funciones de los parámetros a_i y b. Sea $x = F_k(a,b), 1 \le k \le K$ con $a = (a_1,....,a_n)$ y x un número real o complejo. El procedimiento para hallar solución es el mismo para las K funciones F_k, por lo que se considerará una de ellas:

$$x = F_k(a,b), \text{ para algún } 1 \le k \le K \quad (9)$$

Si se sustituyen a_i y b por los números borrosos triangulares $\widetilde{A}_i$ y $\widetilde{B}$ respectivamente, se resuelve la ecuación

$$H(\widetilde{X}, \widetilde{A}) = \widetilde{B},$$

con $\widetilde{X}$: número borroso complejo o real y $\widetilde{A} = (\widetilde{A}_1,......\widetilde{A}_n)$.

La primera nueva solución se basa en la ecuación (9).

Se define $A_\alpha = \prod_{i=1}^{n} A_{i_\alpha}$, $0 \le \alpha \le 1$. Se supone H continua y F_k continua en $A_0 \times B_0$.

Si $\Omega_k(\alpha) = \{F_k(a,b) / a \in A_\alpha, b \in B_\alpha\}, 0 \le \alpha \le 1$, $\widetilde{X}_k$ es un conjunto borroso real o complejo definido por su función de pertenencia:

$$\mu_k(x) = \begin{cases} \sup\{\alpha / x \in \Omega_k(\alpha)\} & si\ x \in \Omega_k(0) \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}.$$

$\widetilde{X}_k$ es una solución de la ecuación con coeficientes borrosos $H(\widetilde{X}, \widetilde{A}) = \widetilde{B}$.

Buckley (1992) prueba que si $\Omega_k(0)$ contiene sólo números reales, entonces $\widetilde{X}_k$ es un número borroso real.

Al suponer que la nueva solución y las obtenidas por los métodos clásicos existen, de la comparación entre ellas surge que $\widetilde{X}_e \le \widetilde{X}_k$. Si H es monótona, entonces $\widetilde{X}_c \le \widetilde{X}_k$.

4. CONCEPTOS FINANCIEROS EN UN AMBIENTE INCIERTO

4.1. Valor final de un capital

El capital que se invierte durante n períodos y la tasa están dados por los números borrosos positivos $\tilde{A}$ e $\tilde{I}$ respectivamente.

Al utilizar propiedades del producto y la suma de números borrosos positivos, Buckley (1987) prueba que $\tilde{S}_n$ es el capital acumulado luego de n períodos, resulta $\tilde{S}_n = \tilde{A}.\left(1+\tilde{I}\right)^n$. En términos de los α-cortes queda $S_{n_\alpha} = A_\alpha.\left(1+I_\alpha\right)^n \quad 0 \leq \alpha \leq 1$.

Si la cantidad de períodos es un número borroso $\tilde{n}$ y $\tilde{S}$ es el capital final, aplicando el *Principio de Extensión* unificado a la expresión $S_n = A(1+i)^n$, se obtiene su función de pertenencia definida por:

$$\mu_{\tilde{S}}(x) = \sup_{\Gamma(x)}(\theta),$$

con $\theta = \min\{\mu_{\tilde{A}}(a), \mu_{\tilde{I}}(i), \mu_{\tilde{n}}(n)\}$ y $\Gamma(x) = \left\{(a,i,n) / a(1+i)^n = x\right\}$

Buckey (1987) demuestra que si $\tilde{n} = n$, entonces $\mu_{\tilde{S}}(x) = \mu_{\tilde{S}_n}(x)$. Esto implica que $\mu_{\tilde{S}}(x) = \max\limits_{1 \leq j \leq K}\left(\min\left\{\mu_{\tilde{S}_{n_j}}\left(x, \alpha_j\right)\right\}\right)$. Quiere decir que se halla $\tilde{S}_{n_j}$ y se trunca a la altura α_j para luego tomar el máximo de todos estos conjuntos borrosos. Puede resultar que $\tilde{S}$ no sea un número borroso.

4.1.1. Caso de estudio. La tasa de interés.

Un ahorrista sabe que dispondrá entre u$s 14800 y u$s 15500, pero lo más posible es que sean u$s 15000. Se propone invertirlos a una tasa *I*. Luego de un año, necesita extraer entre u$s 3400 y u$s 3800, pero lo más posible es que retire u$s 3500. Después de dos años de su depósito inicial desea tener entre u$s 14000 y u$s 14800, pero de acuerdo con las tasas vigentes sabe que lo más posible es que disponga de u$s 14500. Hallar los valores extremos y el más posible que puede tomar la tasa de interés.

Se consideran los NBT:

$\tilde{A} = (14.8, 15.0, 15.5)$ capital inicial

$\tilde{S}_1 = (3.4, 3.5, 3.8)$ extracción que debe realizar al cabo de un año

$\widetilde{S}_2 = (14.0, 14.5, 14.8)$ capital que pretende disponer luego de 2 años

Queda planteada una ecuación con incógnita $\widetilde{I}$

$$\left[\left(\widetilde{A}-\widetilde{S}_1\right)+\widetilde{A}\widetilde{I}\right]+\left[\left(\widetilde{A}-\widetilde{S}_1\right)+\widetilde{A}\widetilde{I}\right]\widetilde{I}=\widetilde{S}_2 \qquad (10)$$

Como el producto de números borrosos es distributivo con respecto a la suma resulta: $\left(\widetilde{A}-\widetilde{S}_1\right)+\widetilde{A}\widetilde{I}+\left(\widetilde{A}-\widetilde{S}_1\right)\widetilde{I}+\widetilde{A}\widetilde{I}^2=\widetilde{S}_2$

$$\widetilde{A}\widetilde{I}^2+\left(2\widetilde{A}-\widetilde{S}_1\right)\widetilde{I}+\left(\widetilde{A}-\widetilde{S}_1\right)=\widetilde{S}_2 \qquad (11)$$

Si se considera: $\widetilde{B}=2\widetilde{A}-\widetilde{S}_1$, $\widetilde{D}=\widetilde{A}-\widetilde{S}_1$ la ecuación (11) se reduce a

$$\widetilde{A}\widetilde{I}^2+\widetilde{B}\widetilde{I}+\widetilde{D}=\widetilde{S}_2$$

Al implementar α-cortes, la solución $\widetilde{I}$ con $I_\alpha=\left[x_1(\alpha),x_2(\alpha)\right]$ se obtiene resolviendo para cada α el sistema:

$$\begin{cases} a_1(\alpha)(x_1(\alpha))^2+b_1(\alpha)x_1(\alpha)+d_1(\alpha)=s_1(\alpha) \\ a_2(\alpha)(x_2(\alpha))^2+b_2(\alpha)x_2(\alpha)+d_2(\alpha)=s_2(\alpha) \end{cases} \qquad (12)$$

$$a_1(\alpha)=0.2\alpha+14.8 \qquad a_2(\alpha)=-0.5\alpha+15.5 \qquad (13)$$

$$b_1(\alpha)=0.7\alpha+25.8 \qquad b_2(\alpha)=-1.1\alpha+27.6 \qquad (14)$$

$$s_1(\alpha)=0.7\alpha+12.8 \qquad s_2(\alpha)=-0.7\alpha+14.2 \qquad (15)$$

$$d_1(\alpha)=0.5\alpha+11 \qquad d_2(\alpha)=-0.6\alpha+12.1 \qquad (16)$$

$$s_1(\alpha)-d_1(\alpha)=0.2\alpha+1.8 \qquad s_2(\alpha)-d_2(\alpha)=-0.1\alpha+2.1 \qquad (17)$$

Al reemplazar en (12) por (13), (14), (15), (16) y (17),

$$x_1(\alpha)=\frac{-(0.7\alpha+25.8)+\sqrt{(0.7\alpha+25.8)^2+4(0.2\alpha+1.8)(0.2\alpha+14.8)}}{2(0.2\alpha+14.8)}$$

$$x_2(\alpha)=\frac{-(-1.1\alpha+27.6)+\sqrt{(-1.1\alpha+27.6)^2+4(-0.5\alpha+15.5)(-0.1\alpha+2.1)}}{2(-0.5\alpha+15.5)}$$

Cuando se toma $\alpha = 0$ se obtiene que el valor mínimo de la tasa de interés es 6.72% y su valor máximo es 7.32%.
Al considerar $\alpha = 1$, el valor de máxima presunción es 7.25%

4.2. Valor actual de un capital

Se define el valor actual $A(\tilde{S}, n)$ de una cantidad borrosa $\tilde{S}$, n períodos en el futuro si la tasa de interés efectiva borrosa periódica es $\tilde{I}$. En este caso, $\tilde{S}$ es positivo o negativo e $\tilde{I}$ es positivo. Se necesitarán dos definiciones para $A(\tilde{S}, n)$, según sea $\tilde{S}$ positivo o negativo.

$A_1(\tilde{S}, n) = \tilde{A}$ si y sólo si $\tilde{A}$ es un número borroso y $\tilde{A}.(1+\tilde{I})^n = \tilde{S}$

$A_2(\tilde{S}, n) = \tilde{A}$ si y sólo si $\tilde{A}$ es un número borroso y $\tilde{A} = \tilde{S}.(1+\tilde{I})^{-n}$

Cabe observar que si $A_1(\tilde{S}, n)$ se invierte hoy a tasa $\tilde{I}$, acumulará $\tilde{S}$ en n períodos debido a que $A_1(\tilde{S}, n).(1+\tilde{I})^n = \tilde{S}$, pero $A_2(\tilde{S}, n).(1+\tilde{I})^n$ será sólo aproximadamente igual a $\tilde{S}$.

Buckley (1998) obtiene los siguientes resultados:

a. Si $\tilde{S}$ es negativo, entonces existe $A_1(\tilde{S}, n)$. En otro caso $A_1(\tilde{S}, n)$ puede no existir.

b. Si $\tilde{S}$ es positivo, entonces existe $A_2(\tilde{S}, n)$. En otro caso $A_2(\tilde{S}, n)$ puede no existir.

Ejemplo. Se mostrará un ejemplo sencillo en el que $\tilde{S}$ es positivo y $A_1(\tilde{S}, n)$ no está definido.
Sean $\tilde{S} = (290{,}300{,}310)$ $\quad \tilde{I} = (0.08{,}0.10{,}0.11)$ $\quad n = 10$
Debe ser $\tilde{S} = \tilde{A}.(1+\tilde{I})^{10}$

Al utilizar α - cortes, la solución $\tilde{A}$ con $A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ se obtiene resolviendo para cada α el sistema:

$$\begin{cases} a_1(\alpha)(1+i_1(\alpha))^{10} = s_1(\alpha) \\ a_2(\alpha)(1+i_2(\alpha))^{10} = s_2(\alpha) \end{cases} \tag{18}$$

$$s_1(\alpha) = 10\alpha + 290 \qquad s_2(\alpha) = -10\alpha + 300 \tag{19}$$

$i_1(\alpha) = 0.02\alpha + 0.08 \qquad i_2(\alpha) = -0.01\alpha + 0.10$ (20)

Se reemplaza (19) y (20) en (18), queda:

$$\begin{cases} a_1(\alpha)(0.02\alpha + 1.08)^{10} = 10\alpha + 290 \\ a_2(\alpha)(-0.01\alpha + 1.10)^{10} = -10\alpha + 310 \end{cases} \qquad (21)$$

Si $\alpha = 0$, resultan $a_1 = 134.33$ y $a_2 = 119.18$, lo que no define un conjunto borroso.

En el resto de este trabajo se utilizará $A_1(\tilde{S}, n)$ si $\tilde{S}$ es negativo y $A_2(\tilde{S}, n)$ si $\tilde{S}$ es positivo. Sólo se utilizará el valor actual de números borrosos negativos cuando se consideran flujos de fondos borrosos.

Si el número de períodos $\tilde{n}$ es borroso, $A_2(\tilde{S}, n)$ es el valor actual de $\tilde{S}$ con función de pertenencia $\mu_2(x)$. Resulta:

$$\mu_{2\tilde{S}}(x) = \sup_{\Gamma(x)}(\theta),$$

con $\theta = \min\{\mu_{\tilde{S}}(s), \mu_{\tilde{I}}(i), \mu_{\tilde{n}}(n)\}$ y $\Gamma(x) = \{(s, i, n) / s(1+i)^{-n} = x\}$.

Además se verifica que $\mu_{2\tilde{S}}(x) = \mu_{2(\tilde{S},n)}$. Este resultado implica que $\mu_{\tilde{S}}(x) = \max_{1 \le j \le K}\left(\min\left\{\mu_{2\tilde{S}_{n_j}}(x, \alpha_j)\right\}\right)$. Al razonar como en 4.1. se deduce que $A_2(\tilde{S}, n)$ podría no ser un número borroso.

4.2.1. Caso de estudio. El pequeño empresario

Un empresario desea saber de cuánto dinero dispondría hoy si al cabo de diez años tendrá en su cuenta entre \$80000 y \$150000, aunque lo más posible es que tenga \$100000. Se supone que en promedio la tasa de interés será como mínimo del 3%, como máximo del 7% y lo más posible es que sea del 4,5% para los diez períodos.

Se consideran los NBT:

$\tilde{S} = (80000, 100000, 150000)$ capital final

$\tilde{I} = (0.03, 0.045, 0.07)$ tasa de interés

$n = 10$ cantidad de períodos durante los cuales se hace el depósito.

En este caso se desea hallar el valor actual $\tilde{A}$.

Como $\tilde{S}$ es positivo se utiliza $\tilde{A} = \tilde{S}.(1 + \tilde{I})^{-n}$ para resolver la ecuación.

Si se emplean α - cortes, la solución $\widetilde{A}$ con $A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ se obtiene resolviendo para cada α el sistema:

$$\begin{cases} a_1(\alpha) = s_1(\alpha)(1 + i_2(\alpha))^{-10} = s_1(\alpha) \\ a_2(\alpha) = s_2(\alpha)(1 + i_2(\alpha))^{-10} = s_2(\alpha) \end{cases} \quad (22)$$

$$s_1(\alpha) = 20000\alpha + 80000 \qquad s_2(\alpha) = -50000\alpha + 150000 \quad (23)$$

$$i_1(\alpha) = 0.015\alpha + 0.03 \qquad i_2(\alpha) = -0.025\alpha + 0.07 \quad (24)$$

Si se reemplaza (23) y (24) en (22), resulta

$$\begin{cases} a_1(\alpha) = (20000\alpha + 80000)(-0.025\alpha + 1.07)^{-10} \\ a_2(\alpha) = (-50000\alpha + 150000)(0.015\alpha + 1.03)^{-10} \end{cases} \quad (25)$$

Al tomar $\alpha = 0$, se obtiene que el valor mínimo de dicho valor actual es \$40667,943 y el valor máximo es \$111614,09. Al considerar $\alpha = 1$, el valor de máxima presunción es \$64.392,993.

4.3. Rentas financieras

4.3.1. Valor final

Un capital borroso $\widetilde{C}$ se deposita al término de cada período de interés durante n períodos y el interés borroso efectivo periódico es $\widetilde{I}$.

El capital acumulado $\widetilde{A}_{n\rceil \widetilde{I}}$ luego de n períodos es:

$$\widetilde{A}_{n\rceil \widetilde{I}} = \widetilde{C} + \widetilde{C}.(1 + \widetilde{I}) + \ldots + \widetilde{C}.(1 + \widetilde{I})^{n-1},$$

con $\widetilde{C}$ e $\widetilde{I}$ números borrosos positivos

En términos de los α - cortes queda:

$$A_{n\rceil \widetilde{I}\ \alpha} = C_\alpha \beta(n, \mu_{\widetilde{I}}(i)) \quad 0 \le \alpha \le 1.$$

Si el número de períodos $\widetilde{n}$ es borroso, sea $\widetilde{A}_{\widetilde{n}\rceil \widetilde{I}}$ el valor futuro de la renta cuya función de pertenencia es:

$$\mu_{\widetilde{A}_{\widetilde{n}\rceil \widetilde{I}}}(x) = \sup_{\Gamma(x)}(\theta),$$

con $\theta = \min\{\mu_{\widetilde{C}}(c), \mu_{\widetilde{I}}(i), \mu_{\widetilde{n}}(n)\}$ y $\Gamma(x) = \{(c, i, n) / c \cdot \beta(i, n) = x\}$.

Además, si $\tilde{n} = n$ se obtiene $\mu_{\tilde{A}_{\tilde{n}\rceil \tilde{I}}}(x) = \mu_{\tilde{A}_{n\rceil \tilde{I}}}(x)$. Este resultado permite encontrar $\tilde{A}_{n\rceil \tilde{I}}$ fácilmente debido a que $\mu_{\tilde{A}_{n\rceil \tilde{I}}}(x) = \max\limits_{1 \le j \le K}\left(\min\left\{\mu_{\tilde{A}_{\tilde{n}\rceil \tilde{I}}}(x)(x, \alpha_j)\right\}\right)$.

4.3.1.1. Caso de estudio. El rendimiento

Una persona desea reunir al cabo de tres años una suma que varía entre los \$15000 y \$17000, aunque cree que necesitará \$16500, suponiendo que abonará \$4000 en concepto de cuota. Calcular los posibles valores que puede tomar la tasa de interés.

Se consideran los siguientes datos:

$\tilde{A}_{3\rceil \tilde{I}} = (15000, 16500, 17000)$ capital acumulado al cabo de tres años

$C = 4000$ cuota nítida y por lo tanto caso particular de NBT

$n = 3$ cantidad de períodos

Con el objeto de hallar la tasa de interés $\tilde{I}$ se plantea la ecuación:

$$\tilde{A}_{n\rceil \tilde{I}} = C + C \cdot \left(1 + \tilde{I}\right) + C \cdot \left(1 + \tilde{I}\right)^2 \tag{26}$$

(26) puede expresarse de la siguiente forma:

$$\tilde{A}_{n\rceil \tilde{I}} = C + C + C \cdot \tilde{I} + C + 2 \cdot C \cdot \tilde{I} + C \cdot \tilde{I}^2$$

$$\tilde{A}_{n\rceil \tilde{I}} = 3 \cdot C + 3 \cdot C \cdot \tilde{I} + C \cdot \tilde{I}^2$$

Al emplear α- cortes , la solución $\tilde{I}$ con $I_\alpha = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$ se obtiene resolviendo para cada α el sistema :

$$\begin{cases} a_1(\alpha)_{n\rceil \tilde{I}} = 3 \cdot C + 3 \cdot C \cdot x_1(\alpha) + C \cdot (x_1(\alpha))^2 \\ a_2(\alpha)_{n\rceil \tilde{I}} = 3 \cdot C + 3 \cdot C \cdot x_2(\alpha) + C \cdot (x_2(\alpha))^2 \end{cases} \tag{27}$$

$$a_1(\alpha)_{n\rceil \tilde{I}} = 1500 \cdot \alpha + 15000 \qquad a_2(\alpha)_{n\rceil \tilde{I}} = -500 \cdot \alpha + 17000 \tag{28}$$

$C = 4000$

Si se reemplaza (28) en (27):

$$\begin{cases} 1500\alpha + 15000 = 12000 + 12000 x_1(\alpha) + 4000 (x_1(\alpha))^2 \\ -500\alpha + 17000 = 12000 + 12000 x_2(\alpha) + 4000 (x_2(\alpha))^2 \end{cases}$$

$$x_1(\alpha)=\frac{-12000+\sqrt{(12000)^2-4\cdot 4000\cdot(-1500\alpha-3000)}}{2\cdot 4000}$$

$$x_2(\alpha)=\frac{-12000+\sqrt{(12000)^2-4\cdot 4000\cdot(500\alpha-5000)}}{2\cdot 4000}$$

Al tomar $\alpha=0$ se obtiene que el valor mínimo de la tasa de interés es 23.20% y su valor máximo es 37.08%. Al considerar $\alpha=1$, el valor de máxima presunción es 33.71%

4.3.2. Valor actual

Se hacen pagos borrosos $\tilde{C}$ al finalizar cada período de interés durante n períodos con una tasa de interés borrosa $\tilde{I}$.

El valor actual de dichas cuotas es el número borroso:

$$\tilde{V}_{n\rceil\tilde{I}}=\sum_{j=1}^{n}\tilde{C}_j\left(1+\tilde{I}\right)^{-j}$$

Cabe observar que con objeto de alivianar la notación se considera cada $\tilde{C}_j=A_2\left(\tilde{C},j\right)$.

Si el número de períodos $\tilde{n}$ es borroso, sea $\tilde{V}_{\tilde{n}\rceil\tilde{I}}$ el valor actual de la renta cuya función de pertenencia es:

$$\mu_{\tilde{V}_{\tilde{n}\rceil\tilde{I}}}(x)=\sup_{\Gamma(x)}(\theta),$$

con $\theta=\min\{\mu_{\tilde{C}}(c),\mu_{\tilde{I}}(i),\mu_{\tilde{n}}(n)\}$ y $\Gamma(x)=\{(c,i,n)/\,c\cdot\gamma(i,n)=x\}$.

En este caso si $\tilde{n}=n$ entonces $\mu_{\tilde{V}_{\tilde{n}\rceil\tilde{I}}}(x)=\mu_{\tilde{V}_{n\rceil\tilde{I}}}(x)$.

4.4. Valor actual neto (VAN)

Se considera un flujo de fondos neto borroso $\tilde{A}=\left(\tilde{A}_j\right)$ $0\le j\le n$, con $\tilde{I}$ tasa de interés borrosa que representa el costo de capital de la firma. $\tilde{A}_0$ es un número borroso negativo y los restantes $\tilde{A}_j$ son positivos o negativos. La tasa $\tilde{I}$ es un número borroso positivo.

El valor actual neto borroso de $\tilde{A}$ es:

$$VAN(\widetilde{A},n)=\widetilde{A}_0+\sum_{j=1}^{n}A_{k(l)}(\widetilde{A}_j,j) \text{ con } k(l)=\begin{cases}1 & si\ \widetilde{A}_j<0\\ 2 & si\ \widetilde{A}_j>0\end{cases}$$

En términos de los α -cortes:

$$A_\alpha=\sum_{j=0}^{n}A_{j\alpha}.(1+I_\alpha)^{-j}$$

En caso de considerarse varios flujos de fondos, se calculan sus respectivos VAN. Sólo se tienen en cuenta aquellas propuestas cuyos VAN sean mayores a $\widetilde{0}$ y luego se determina la mejor opción de inversión eligiendo la de mayor valor.

4.4.1. El pequeño inversor

Un inversor desea saber cuál de tres inversiones es la más rentable. Cuenta con información incierta sobre la tasa de interés y los flujos de fondos futuros, por lo que se construyeron los siguientes NBT para no descartar información:

Flujos de fondos para cada proyecto:

Proyecto 1	*Proyecto 2*	*Proyecto 3*
$A_0=-50000$	$A_0=-80000$	$A_0=-30000$
$\widetilde{A}_1=(-1000,-500,-300)$	$\widetilde{A}_1=(1000,2500,3000)$	$\widetilde{A}_1=(10000,12500,13000)$
$\widetilde{A}_2=(50000,60500,70000)$	$\widetilde{A}_2=(30000,40500,50000)$	$\widetilde{A}_2=(20000,32500,35000)$
$\widetilde{A}_3=(11000,12500,15000)$	$\widetilde{A}_3=(21000,22500,23000)$	$\widetilde{A}_3=(17000,20500,23000)$

Las tasas de interés para cada período son las siguientes:

Proyecto 1	*Proyecto 2*	*Proyecto 3*
$\widetilde{I}=(0.03,0.04,0.05)$	$\widetilde{I}=(0.02,0.035,0.07)$	$\widetilde{I}=(0.04,0.055,0.07)$

Al aplicar la metodología explicada se obtienen como soluciones números borrosos que representan los valores actuales netos para cada proyecto de inversión. Como los números obtenidos no son NBT, se utiliza el orden natural para manejar la información que proporcionan.

Proyecto 1	*Proyecto 2*	*Proyecto 3*
$VAN=(3901,16567,28647)$	$VAN=(-35720,-19484,-7328)$	$VAN=(10690,28505,35305)$

En este caso, utilizando el criterio de selección del VAN, se elegiría el Proyecto 3 por tener mayor valor.

El método del VAN se generaliza a proyectos con fecha de finalización incierta. Sea $\widetilde{n}$ la finalización del proyecto $\widetilde{A}=\left(\widetilde{A}_j\right) \quad 0 \le j \le n$.

Si $VAN\left(\widetilde{A}\right)$ es el valor actual neto del proyecto, su función de pertenencia es:

$$\mu_{\widetilde{A}}(x)=\sup_{\Gamma(x)}(\theta),$$

con $\theta=\min\left\{\mu_{\widetilde{A}_j}(a_j),\mu_{\widetilde{I}}(i),\mu_{\widetilde{n}}(n)\right\}$ y $\Gamma(x)=\left\{(a_j,i,n)/\sum_{j=0}^{n} a_j(1+i)^{-j}=x\right\}$.

Si $\widetilde{A}_j>0 \quad 1\le j\le n$ entonces $\mu_{\widetilde{A}}(x)=\mu_{(\widetilde{A},n)}(x)$.

El caso más común de flujo de fondos es tener una inversión inicial $\widetilde{A}_0<0$ y una sucesión de retornos $\widetilde{A}_j>0 \quad 1\le j\le n$. En este caso, se puede hallar $VAN\left(\widetilde{A}\right)$ porque $\mu_{\widetilde{A}}(x)=\max_{1\le j\le K}\left(\min\left(\mu_{(\widetilde{A},n_j)}(x),\alpha_j\right)\right)$.

Si se consideran flujos de fondos con duraciones inciertas, se ordenan los conjuntos $VAN\left(\widetilde{A}\right)$ de mayor a menor. Los conjuntos borrosos $VAN\left(\widetilde{A}\right)$ no son necesariamente números borrosos cuando $\widetilde{n}$ es borroso. Nuevamente, las propuestas se descartan si $VAN\left(\widetilde{A}\right)<\widetilde{0}$.

4.5. Tasa interna de retorno (TIR)

Sea el flujo de fondos borrosos $\widetilde{A}=\left(\widetilde{A}_j\right) \quad 0\le j\le n$. $\widetilde{A}_0<0$ y $\widetilde{A}_j \; 1\le j\le n$ son positivos o negativos. La $TIR\left(\widetilde{A},n\right)$ es una tasa de interés borrosa $\widetilde{I}$ que hace que el valor actual de todas las cantidades futuras iguale a la inversión inicial. Por lo tanto $\widetilde{I}$ satisface:

$$\sum_{j=1}^{n} A_{k(l)}\left(\widetilde{A}_j,j\right)=-\widetilde{A}_0 \text{ , con } k(l)=\begin{cases}1 & si\ \widetilde{A}_j<0\\ 2 & si\ \widetilde{A}_j>0\end{cases}.$$

$\widetilde{I}$ es un número borroso con $i_1>-1$.

La situación más común y más importante ocurre cuando $\widetilde{A}_j>0 \quad 1\le j\le n$ y en este caso se garantiza la existencia de una única TIR. Se puede ver que estos flujos de fondos borrosos tan simples pueden no tener solución.

En general la TIR no se puede calcular utilizando los métodos clásicos de resolución de ecuaciones con coeficientes borrosos.

Ejemplo. Se mostrará un ejemplo sencillo en el que no es posible definir la TIR.

Sean $-\widetilde{A}_0 = (100,110,110)$ $\widetilde{A}_1 = (190,200,300)$ $\widetilde{A}_2 = (190,200,300)$

Queda planteada la ecuación:

$$-\widetilde{A}_0 = \widetilde{A}_1.\left(1+\widetilde{I}\right)^{-1} + \widetilde{A}_2.\left(1+\widetilde{I}\right)^{-2}$$

Si se considera $\widetilde{I} = (i_1.i_2, i_3)$, mediante el método de los α-cortes se obtiene el sistema:

$$190.(1+i_1)^{-2} + 190.(1+i_1)^{-1} = 100 \quad (29)$$

$$300.(1+i_2)^{-2} + 300.(1+i_2)^{-1} = 110 \quad (30)$$

$$200.(1+i_3)^{-2} + 200.(1+i_3)^{-1} = 110 \quad (31)$$

Al resolver (30) y (31) se obtiene $i_2 = 1.535$ e $i_3 = 2.505$, lo que no da como resultado un número borroso.

4.5.1. Nueva propuesta para la TIR

Como se ha visto, los métodos clásicos de resolución de ecuaciones con coeficientes borrosos no siempre permiten definir la TIR en un contexto incierto. Por ese motivo, se propondrá otra manera de calcularla utilizando el nuevo concepto de solución para la resolución de ecuaciones con coeficientes borrosos.

Se pretende hallar el valor de $\widetilde{I}$ que satisface la ecuación $\sum_{j=1}^{n} \widetilde{A}_j.\left(1+\widetilde{I}\right)^{-j} = -\widetilde{A}_0$.

Si $A_{j\alpha} = \left[a_{j1}(\alpha), a_{j2}(\alpha)\right]$, $0 \leq j \leq n$, $0 \leq \alpha \leq 1$, se define :

$$\Omega(\alpha) = \left\{ i \,/ \sum_{j=1}^{n} a_j.(1+i)^{-j} = -a_0, a_j \in A_{j\alpha}, 0 \leq j \leq n \right\} \text{ para } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

El conjunto borroso $\widetilde{I}$ dado por la función de pertenencia $\mu_{\widetilde{I}}(x) = \sup\{\alpha \,/\, x \in \Omega(\alpha)\}$ es un número borroso que además verifica $I_\alpha = \Omega(\alpha)$ para $0 \leq \alpha \leq 1$.

$\widetilde{I}$ es la TIR borrosa para el flujo de fondos $\widetilde{A}=\left(\widetilde{A}_j\right)$, debido a que siempre es posible calcularla. Además, si existiera solución $\widetilde{I}_0$ hallada por los métodos clásicos, resultaría $\widetilde{I}_0 \leq \widetilde{I}$.

5. COMENTARIOS FINALES

En este trabajo se han presentado alternativas a la utilización de cantidades exactas cuando se trabaja con variables financieras en un escenario incierto. Este enfoque brinda al inversor una visión más amplia de sus posibilidades dado que las metodologías borrosas aplicadas captan de manera adecuada la incertidumbre existente.

Los autores siguen trabajando en el tema con el propósito de desarrollar nuevas técnicas que permitan expresar la imprecisión, pero que no tengan las limitaciones que a menudo presentan las ecuaciones con coeficientes borrosos.

Algunos autores como Sánchez y Terceño (2003) utilizan un método de ajuste de la estructura temporal de la TIR que les permite cuantificarla. Hacen uso de técnicas de regresión borrosa.

BIBLIOGRAFÍA

Brealey, R.A.; Meyer, S.C. (1993). *Fundamentos de financiación empresaria.* Mc Graw Hill. Madrid.

Buckley, J.J. (1987). "The fuzzy mathematics of finance. *Fuzzy Sets and Systems* Vol 21. North-Holland, pp. 257-274.

Buckley, J.J. (1987). "Portfolio analysis using possibility distributions" en E. Sanchez – L. Zadeh Eds. *Approximate Reasoning in Intelligent Systems, Decision and Control.* Pergamon Press. Oxford.

Buckley, J.J.; Qu, Y. (1990). "On using α-cuts to evaluate fuzzy equations". *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 38, pp. 309-312.

Buckley, J.J.(1992). "Solving fuzzy equations". *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 50, pp 1-14.

Buckley, J.J. (1992). "Solving fuzzy equations in economics and finance" *Fuzzy Sets and Systems 48*, pp. 289-296.

Cissell, R.; Cissell, H. (1978). *Matemáticas Financieras*. México. Editorial CECSA.

Delgado, M.; Duarte, O.; Requena, I. (2003). "Tasa interna de retorno difusa". En: E. González López – C. Mendaña Cuervo, Eds. *Proceedings* *of 10th SIGEF Congress*: *Emergent Solutions for the Information and Knowledge Economy*, pp. 475-485.

Kaufmann, A. (1982). *Introducción a la teoría de los subconjuntos borrosos*. Editorial CECSA. México.

Suárez, A.S. (1995). *Decisiones óptimas de la inversión y financiación en la empresa*. Ed. Pirámides. Madrid.

Terceño Gómez, A.; Sánchez, J. (2003). "Estimating a term structure of interest rates for fuzzy financial pricing by using fuzzy regression methods". *Fuzzy Sets and Systems* Vol 139, pp. 313-331.