ISSN 2451-5728

Dinámica económica, incertidumbre y ecuaciones diferenciales borrosas

Andrea Parma
Luisa L. Lazzari

Nº84 SERIE DOCUMENTOS DE TRABAJO DEL IIEP | JUNIO DE 2023

UBA Universidad de Buenos Aires
CONICET
IIEP

INSTITUTO INTERDISCIPLINARIO
DE ECONOMÍA POLÍTICA

ISSN 2451-5728

Autores

Andrea Parma
andreaparma38@gmail.com
Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas - Departamento de Matemática. Buenos Aires, Argentina.

Luisa L. Lazzari
luisalazzari@gmail.com
Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas. Buenos Aires, Argentina.
CONICET - Universidad de Buenos Aires. Instituto Interdisciplinario de Economía Política. Buenos Aires. Argentina.

Como citar:

Parma, A., Lazzari, L. (2023). Dinámica económica, incertidumbre y ecuaciones diferenciales borrosas Serie Documentos de Trabajo del IIEP, 84, 1-21. https://ojs.econ.uba.ar/index.php/DT-IIEP/issue/view/453

Los Documentos de Trabajo del IIEP reflejan avances de investigaciones realizadas en el Instituto y se publican con acuerdo de la Comisión de Publicaciones.
Los autores son responsables de las opiniones expresadas en los documentos.

Coordinación editorial **Ed. Hebe Dato**
Corrección de estilo **Ariana Lay y Ed. Hebe Dato**
Diseño **DG. Vanesa Sangoi**

Dinámica económica, incertidumbre y ecuaciones diferenciales borrosas*

Modelos dinámicos
Ecuaciones diferenciales
Incertidumbre
Números borrosos

En el análisis económico se utiliza el término dinámica para referirse a un análisis cuyo objetivo es trazar y estudiar las trayectorias temporales de las variables, como así también determinar si estas tenderán a converger a ciertos valores de equilibrio luego de transcurrido un tiempo.
La introducción del tiempo en forma explícita en la formulación de los problemas puede hacerse como una variable continua o discreta. Su empleo dependerá del contexto en el que esté inmersa la situación a estudiar.
En este trabajo se considera el caso de tiempo continuo y ambiente incierto, por lo que se emplearán ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes borrosos para resolver dos problemas clásicos de la dinámica económica generalizados a situaciones de incertidumbre. La vaguedad estará representada mediante números borrosos triangulares.
Los conjuntos borrosos permiten entender que todo es cuestión de grado, lo cual facilita ajustarse a la realidad, para procesar, no solo datos ciertos y aleatorios, sino también información basada en percepciones, sensaciones y expectativas.

Economic dynamics, uncertainty and fuzzy differential equations

Dynamic models
Differential equations
Uncertainty
Fuzzy numbers

In the economic analysis is used the term dynamics to refer to an analysis whose objective is to trace and study the time trajectories of the variables, as well as determine if these will tend to converge to certain equilibrium values after a while.
The introduction of time explicitly in the formulation of problems can be done as a continuous or discrete variable. Its use will depend on the context in which the situation to be studied is immersed.
In this paper the case of continuous time and uncertain environment is considered, so second-order linear differential equations with fuzzy constant coefficients will be used to solve two classic problems of economic dynamics in situations of uncertainty. Vagueness will be represented by triangular fuzzy numbers.
Fuzzy sets allow us to understand that everything is a matter of degree, which makes it easier to adjust to reality, to process, not only certain and random data, but also information based on perceptions, sensations and expectations.

JEL CODE C02, C61, C62

*Investigación adscrita a la Red Sistemas Inteligentes y Expertos. Modelos Computacionales Iberoamericanos (SIEMCI), número de proyecto 522RT0130 en Programa Iberoamericano de Ciencia y Tecnología para el Desarrollo (CYTED).

Índice

1. Introducción

En el análisis económico se utiliza el término "dinámica" para referirse a un análisis cuyo objetivo es trazar y estudiar las trayectorias temporales de las variables, como así también determinar si estas tenderán a converger a ciertos valores de equilibrio luego de transcurrido un tiempo (Chiang, 1999).

La introducción del tiempo en forma explícita en la formulación de los problemas puede hacerse como una variable continua o discreta. Su empleo dependerá del contexto en el que esté inmersa la situación a estudiar. En este trabajo consideraremos el caso de tiempo continuo por lo que emplearemos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

En algunos casos los modelos dinámicos representados por este tipo de ecuaciones diferenciales involucran variables poco precisas. Bajo tales circunstancias, la teoría clásica es insuficiente para el estudio de problemas dinámicos reales en condiciones de incertidumbre. De allí el interés en el estudio de las ecuaciones diferenciales borrosas (*fuzzy* en inglés) (Ouyang & Wu, 1989; Park & Han, 2000; Vorobiev & Seikkala, 2002; Buckey & Feauring, 2000, 2001; Buckey *et al*., 2010).

La incertidumbre económica ha sido muy estudiada desde hace décadas. Todos los trabajos realizados relacionados con este concepto, independientemente del punto de vista, la metodología o el enfoque de estudio que se utilice, han llegado a la conclusión que repercute negativamente sobre los principales indicadores económicos (Allende Espinosa, 2021).

La incertidumbre económica incluye la falta de certeza del valor que tomará una variable económica o un parámetro en una situación futura como así también su impredecibilidad. Esto es una dificultad para una adecuada formulación de los modelos económicos, el empleo de metodología fuzzy en problemas de gestión y economía posibilita una utilización más eficiente de los recursos y proporciona mayor información al decisor que cuando se aplican técnicas matemáticas rígidas.

Los conjuntos borrosos permiten entender que todo es cuestión de grado, lo cual facilita ajustarse a la realidad, para procesar, no solo datos ciertos y aleatorios, sino también información basada en percepciones, sensaciones y expectativas, dado que en los mercados financieros y en la economía en general predominan las emociones y las percepciones humanas.

Tarrazo (2001) plantea varias razones para el uso de la teoría de conjuntos borrosos en economía y finanzas. Entre otras, porque evita la pérdida de información que se produce con el uso de métodos estadísticos que trabajan con promedios, ocultando los valores extremos; porque los modelos económicos y financieros son representaciones aproximadas de la realidad, por lo que no es necesario, en la mayoría de los casos, disponer de valores exactos de las variables involucradas y porque los individuos están capacitados para gestionar la imprecisión y la incertidumbre no frecuentista pero si, perceptible y valuable mediante sensaciones.

Implementar modelos flexibles que empleen metodologías borrosas para plantear y resolver problemas de gestión y economía resulta útil para identificar y comprender las dificultades que se presentan en su análisis y para generar nuevos escenarios de reflexión a la hora de elegir medios y marcar objetivos.

Existen numerosos trabajos que emplean teoría de conjuntos borrosos para estudiar temas de economía, entre otros podemos mencionar: *Economic Theory of fuzzy Equilibria* (Billot, 1995); El enfoque de Buckley del modelo de insumo-producto en condiciones de incertidumbre (Lazzari & Moriñigo, 2004); Herramientas matemáticas innovadoras para la maximización de la utilidad (Lazzari *et al.* 2009); *Fuzzy Mathematics in Economics and Engineering* (Buckley *et al*., 2010); Funciones económicas en un entorno incierto (Lazzari, *et al.,* 2015); Ecuaciones diferenciales borrosas lineales de primer orden y su aplicación al modelo de Sachs (Parma & Fernández, 2016) y *Welfare subjective evaluation. Application to health system access* (Lazzari *et al*., 2020).

En este trabajo se presentan las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden que incorporan incertidumbre en las condiciones iniciales o en algún coeficiente; y se analizan dos aplicaciones de la dinámica económica en ambiente incierto que se modelizan a través de este tipo de ecuaciones.

En la primera se conocen las leyes de demanda y oferta de un bien y se desea obtener la expresión del precio en función del tiempo y determinar el precio de equilibrio. Suponiendo que las cantidades ofrecidas y demandadas no dependen solamente de su precio sino también de las expectativas sobre la evolución futura del mismo, se consideran la demanda y la oferta como funciones del precio y de sus derivadas. Se asume que este problema clásico se lleva a cabo en un ambiente incierto, por lo que no se conocen con exactitud el precio inicial y el precio marginal inicial, pero ambos valores se pueden estimar mediante números borrosos triangulares.

La segunda aplicación está relacionada con el modelo de Domar que expresa la relación entre la renta nacional y la deuda nacional en términos de ecuaciones diferenciales, bajo el supuesto de que la variación del ingreso está definida por una proporción incierta del valor de la renta actual, que se puede determinar con un número borroso triangular.

Estos problemas bajo condiciones de incertidumbre se resuelven mediante ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden que incorporan borrosidad en las condiciones iniciales o en algún coeficiente.

El trabajo está estructurado del siguiente modo. En sección 2 se presentan conceptos básicos de la teoría de conjuntos borrosos, en la 3 se repasa la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes con parámetros y condiciones iniciales nítidas y se expone este tipo de ecuaciones diferenciales cuyas condiciones iniciales y/o parámetros son números borrosos. En la sección 4 se desarrollan dos modelos económicos dinámicos continuos que utilizan ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden en situaciones de certeza y de incertidumbre y por último se ofrecen algunos comentarios.

2. Elementos teóricos

Sea un universo E continuo o discreto. Un subconjunto borroso o fuzzy set $\tilde{A}$ es una función $\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0\ ,\ 1]$ que asigna a cada elemento del conjunto E un valor $\mu_{\tilde{A}}(x)$ perteneciente al intervalo $[0\ ,\ 1]$, llamado grado o nivel de pertenencia de x a $\tilde{A}$.

Dado un subconjunto borroso $\tilde{A}$ del referencial E, se denomina α-corte o conjunto de nivel α de $\tilde{A}$ al conjunto nítido $A_\alpha = \{x \in E / \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ para todo $\alpha \in (0,1]$. Es decir, que un α-corte de un conjunto borroso es el conjunto nítido que contiene todos los elementos del conjunto referencial cuyos grados de pertenencia al conjunto borroso son mayores o iguales que el valor especificado de α (Lazzari, 2010). Si $\alpha = 0$, el α-corte correspondiente es la clausura de la unión de los A_α, con $0 < \alpha \leq 1$ (Buckley & Qu, 1991). La clausura de un conjunto A es el menor subconjunto cerrado que contiene a A, es decir que es la intersección de todos los subconjuntos cerrados que contienen a A, y se denota A^- (Ying-Ming & Mao-Kang, 1997).

Un conjunto borroso $\tilde{A} \subset E$, es *normal* si y sólo si, $\forall x \in E,\ \max\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$, y es *convexo* si y sólo si, $\forall x \in [x_1, x_2] \subset \Re$ se verifica que $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \min\ \{\ \mu_{\tilde{A}}(x_1)\ ,\ \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$ (Tanaka, 1997).

Un número borroso (NB) $\tilde{A}$ (Kaufmann & Gupta, 1985) es un subconjunto borroso de los números reales[1], convexo y normal.

Un número borroso se puede representar por sus α-cortes de manera única. Por ser un subconjunto borroso convexo, sus α-cortes son intervalos cerrados de números reales. Las dos formas de expresar un número borroso, ya sea por su función de pertenencia, $\mu_{\tilde{A}}(x)$, $\forall x \in \Re$, o por los α-cortes, $A_\alpha = [a_1(\alpha)\ , a_2(\alpha)]\alpha \in\ [0\ ,\ 1]$, son equivalentes (Kaufmann & Gupta, 1985).

2.1. Principio de Extensión

Este principio fue introducido por Zadeh (1975) y es una de las ideas básicas de la teoría de conjuntos borrosos porque permite una extensión borrosa de los conceptos matemáticos clásicos, como las operaciones aritméticas.

El principio establece como un subconjunto borroso de un referencial puede inducir un subconjunto borroso de otro referencial (o del mismo) a partir de una función dada entre ambos referenciales.

Sea *f* una función de *X* en *Y*, y $\tilde{A}$ un subconjunto borroso de *X* es posible obtener un nuevo subconjunto borroso $\tilde{B} = f(\tilde{A})$ de *Y* tal que $\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \{(y,\ \mu_{\tilde{B}}(y))/y = f(x),\ x \in X\}$, donde

[1] Se puede definir número borroso en cualquier conjunto referencial totalmente ordenado.

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x) & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

Si f es una función inyectiva, entonces $\mu_{\tilde{B}}(y) = \mu_{\tilde{A}}(f^{-1}(y))$ cuando $f^{-1}(y) \neq \emptyset$.
La importancia de este principio radica en la posibilidad de tratar de forma borrosa cualquier dominio de razonamiento matemático basado en la teoría de conjuntos clásica. Es decir, que se puede reemplazar una variable que toma un valor determinado, por el concepto borroso de grado de pertenencia para cada valor posible (Ramik, 1986).

2.2. Operaciones aritméticas con números borrosos

Para operar con números borrosos existen dos procedimientos: uno mediante el empleo del Principio de Extensión y el otro mediante los α-cortes y la generalización de operaciones con intervalos aritméticos (Buckley *et al.*, 2010). Se puede demostrar que ambos métodos para operar con números borrosos son equivalentes (Klir & Yuan, 1995). En este trabajo se utilizará el segundo procedimiento.

Dado que los α-cortes de un número borroso real continuo son intervalos cerrados de $\Re$, las operaciones entre números borrosos se pueden definir como una generalización de las operaciones entre intervalos aritméticos (Kaufmann y Gupta, 1985).

Sean $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ números borrosos continuos de $\Re$, expresados por sus α-cortes
$A_\alpha = [a_1(\alpha)\ ,\ a_2(\alpha)]$ y $B_\alpha = [b_1(\alpha)\ ,\ b_2(\alpha)]$ para $\alpha \in [0,1]$ (Lazzari, 2010).

- Si $\tilde{C} = \tilde{A}(+)\tilde{B}$ entonces $\tilde{C}_\alpha = A_\alpha(+)\, B_\alpha$

$$A_\alpha(+)\, B_\alpha = [a_1(\alpha)\ ,\ a_2(\alpha)]\ (+)\ [b_1(\alpha)\ ,\ b_2(\alpha)]$$
$$A_\alpha(+)B_\alpha = [a_1(\alpha) + b_1(\alpha), a_2(\alpha) + b_2(\alpha)]$$

- Si $\tilde{C} = \tilde{A}(-)\tilde{B}$ entonces $\tilde{C}_\alpha = A_\alpha(-)\, B_\alpha$

$$A_\alpha(-)\, B_\alpha = [a_1(\alpha)\ ,\ a_2(\alpha)]\ (-)\ [b_1(\alpha)\ ,\ b_2(\alpha)]$$
$$A_\alpha(-)\, B_\alpha = [a_1(\alpha)\ -\ b_2(\alpha)\ ,\ a_2(\alpha)\ -\ b_1(\alpha)]$$

- Si $\tilde{C} = \tilde{A}(.)\tilde{B}$ entonces $\tilde{C}_\alpha = A_\alpha(.)\, B_\alpha$

$$A_\alpha(.)\, B_\alpha = [a_1(\alpha)\ ; a_2(\alpha)](.)[b_1(\alpha); b_2(\alpha)]$$

$$A_\alpha(.)B_\alpha = \big[\min\big(a_1(\alpha)\,.\,b_1(\alpha)\,, a_1(\alpha)\,.\,b_2(\alpha)\,, a_2(\alpha)\,.\,b_1(\alpha)\,, a_2(\alpha)\,.\,b_2(\alpha)\big)\ ;\ \max\big(a_1(\alpha)\,.\,b_1(\alpha)\,, a_1(\alpha)\,.\,b_2(\alpha)\,, a_2(\alpha)\,.\,b_1(\alpha)\,, a_2(\alpha)\,.\,b_2(\alpha)\big)\big]$$

Si $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ son números borrosos continuos de $\Re^+$:

$$A_\alpha(.)\, B_\alpha = [a_1(\alpha)\ .\ b_1(\alpha)\ ;\ a_2(\alpha)\ .\ b_2(\alpha)]$$

- Si $\tilde{C} = \tilde{A}(:)\tilde{B}$ entonces $\tilde{C}_\alpha = A_\alpha(:)\, B_\alpha$

Si $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ son números borrosos continuos de $\Re^+$:

$$A_\alpha(:)B_\alpha = [a_1(\alpha)\,, a_2(\alpha)](:)[b_1(\alpha)\,, b_2(\alpha)]$$
$$A_\alpha(:)B_\alpha = \left[\frac{a_1(\alpha)}{b_2(\alpha)}\ ,\ \frac{a_2(\alpha)}{b_1(\alpha)}\right], b_1(\alpha) > 0, \forall\alpha \in [0\ , 1]$$

2.3. Números borrosos triangulares y de forma triangular

Número borroso triangular (NBT) es el número borroso real continuo, tal que su función de pertenencia es lineal, a izquierda y a derecha, y alcanza el valor uno para un único número real.

Queda determinado por tres números reales $a_1 \leq a_2 \leq a_3$, su expresión mediante α-cortes es:

$$A_\alpha = [(a_2 - a_1)\ \alpha\ +\ a_1\ ,\ (a_2 - a_3)\ \alpha\ +\ a_3] \qquad (1)$$

Es usual representarlo $\tilde{A} = (a_1, a_2,\ a_3)$. Por su gran simplicidad se usan en muchas situaciones prácticas, en particular cuando sobre una determinada magnitud se conocen únicamente tres valores: el mínimo, el máximo y el de mayor nivel de presunción.

Buckley *et al.* (2010) definen número borroso de forma triangular al que está solo parcialmente especificado por los tres números reales $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ y la función de pertenencia, que no es lineal, debe ser continua, monótona creciente en el intervalo [a_1, a_2] y monótona decreciente en el intervalo [a_2, a_3]. Se denota $\tilde{A} \approx (a_1, a_2, a_3)$.

3. Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes

3.1. Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes en ambiente cierto

La expresión general de una ecuación diferencial lineal de 2º orden con coeficientes constantes está dada en (2) (Perez *et al.*, 2003, Apostol, 1999).

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = g(t),\ \text{con } a_2 \neq 0, b \in \Re, t \in I = [0,T], T > 0,\ g(t) \text{ continua en } I \quad (2)$$

Si $g(t) = 0$ la ecuación diferencial se denomina homogénea y está expresada en (3)

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0,\ a_2 \neq 0 \quad (3)$$

La solución general de (3) $y_c(t)$, llamada solución complementaria, se vincula con las raíces de la ecuación característica $a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$, sean r_1 y r_2 dichas raíces:

Raíces reales:

$$r_1 \in \Re \wedge r_2 \in \Re \wedge r_1 \neq r_2 \Rightarrow y_c(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, C_1 \in \Re \wedge C_2 \in \Re$$

$$r_1 \in \Re \wedge r_2 \in \Re \wedge r_1 = r_2 \Rightarrow y_c(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 x e^{r_1 t}, C_1 \in \Re \wedge C_2 \in \Re$$

Raíces complejas:

$$r_1 = h + vi \in C \wedge r_2 = h - vi \in C \Rightarrow y_c(t) = e^{r_1 t}(C_1 sen\ vx + C_2 \cos vt), C_1 \in \Re \wedge C_2 \in \Re$$

Si la ecuación diferencial es completa del tipo $a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b,\ b \neq 0 \wedge a_2 \neq 0$, su solución general es $y(t) = y_c(t) + y_p(t)$, donde $y_p(t)$ es una solución particular de la ecuación diferencial dada.

Si $a_0 \neq 0$ entonces $y_p = \frac{b}{a_0}$, si $a_0 = 0\ y\ a_1 \neq 0$, $y_p = \frac{b}{a_1} x$.

Por último, si $a_1 = a_0 = 0$, entonces $y_p = \frac{b}{2a_2} x^2$.

Si además se conocen las condiciones iniciales $y(t_0) = \gamma_0$ e $y'(t_0) = \gamma_1$, se puede determinar el valor de las constantes C_1 y C_2 para obtener una solución particular.

3.2. Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes en condiciones de incertidumbre

3.2.1. Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes nítidos y condiciones iniciales borrosas

En este apartado se considera la solución de la ecuación diferencial (2) para $t_0 = 0,\ a_2 = 1$ y condiciones iniciales inciertas, expresadas por un NBT. Buckley *et al.*, (2010) proponen tres soluciones: $\tilde{Y}_c$, $\tilde{Y}_e$ y $\tilde{Y}_I$.

En este trabajo se emplearán solo dos tipos de soluciones (Buckey *et al.*, 2010):

- La primera, llamada solución clásica $\tilde{Y}_c(t)$, en la que se considera borrosa la ecuación diferencial nítida (2) y se resuelve.
- Para obtener la segunda $\tilde{Y}_e(t)$, se resuelve la ecuación (2) y luego se aplica el Principio de Extensión para hacerla borrosa.

En ambos casos se emplean NBT y números borrosos de forma triangular.

a) Solución clásica

Dada la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$y''^{(t)} + a_1 y'^{(t)} + a_0 y(t) = g(t),\ t \in I = [0, T], T > 0 \wedge g(t) \text{ continua en } I \quad (4)$$

Las condiciones iniciales son: $y_1(0, \alpha) = \gamma_{01}(\alpha), y_2(0, \alpha) = \gamma_{02}(\alpha), y_1'(0, \alpha) = \gamma_{11}(\alpha),\ y_2'(0, \alpha) = \gamma_{12}(\alpha)$, donde $\gamma_0(\alpha) = [\gamma_{01}(\alpha), \gamma_{02}(\alpha)],\ \gamma_1(\alpha) = [\gamma_{11}(\alpha), \gamma_{12}(\alpha)]$.

La solución clásica (Buckley & Feuring, 2001; Buckley *et al.*, 2010) de la ecuación diferencial (4) es un número borroso de forma triangular $\tilde{Y}_c(t)$ para todo $t \in I$, cuyos α-cortes son:

$$Y_C(t, \alpha) = [y_1(t, \alpha), y_2(t, \alpha)]\ \forall t \in I, \alpha \in [0,1],$$

donde $y_i(t, \alpha),\ i = 1,2$ tienen derivadas respecto de *t* hasta el orden 2, $y_i'(t, \alpha),\ y_i''(t, \alpha)$.

Sustituyendo los α-cortes de $\tilde{Y}_c(t)$ en (4):

$$[y_1''(t, \alpha), y_2''(t, \alpha)] + a_1[y_1'(t, \alpha), y_2'(t, \alpha)] + a_0[y_1(t, \alpha), y_2(t, \alpha)] = [g(t), g(t)]$$

Si se aplica aritmética de intervalos (apartado II) en la última ecuación, se obtienen dos ecuaciones diferenciales con incógnitas $y_1(t, \alpha)$ e $y_2(t, \alpha)$, con las condiciones iniciales dadas.

Si se verifica que:

i) $y_i(t, \alpha)\ i = 1,2$ derivables respecto de α,

ii) $\frac{\partial y_1}{\partial \alpha}(t, \alpha) > 0$ (indica que $y_1(\alpha)$ es creciente),

iii) $\frac{\partial y_2}{\partial \alpha}(t, \alpha)\ < 0$ (indica que $y_2(\alpha)$ es decreciente), y

iv) $y_1(t, 1) = y_2(t, 1)\ \forall t \in I$.

Entonces los α–cortes $Y_C(t, \alpha) = [y_1(t, \alpha), y_2(t, \alpha)]\ \forall t \in I, \alpha \in [0,1]$ definen un número borroso de forma triangular, y existe la solución clásica $\tilde{Y}_c(t)$.

b) Solución por el Principio de Extensión

Algunas veces la solución clásica no existe, dado que no se verifica alguna de las condiciones para que $\tilde{Y}_c(t)$ sea un número borroso. En estos casos se recurre a la solución $\tilde{Y}_e$, basada en el Principio de Extensión (Buckley *et al.*, 2010).

Para ello, primero se debe hallar la solución nítida de (4), $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + G(t)$ con $y_1(t)\ e\ y_2(t)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada, $G(x)$ una solución particular de (4) y c_1, c_2 números reales.

Las condiciones iniciales permiten hallar valores de c_1, c_2 únicos, de modo tal que:

$$\gamma_0 = c_1 y_1(0) + c_2 y_2(0) + G(0) \text{ y } \gamma_1 = c_1 y_1{'}(0) + c_2 y_2{'}(0) + G'(0)$$

Para c_1 y c_2 se obtiene:

$$c_1 = f_1(\gamma_0, \gamma_1) + h_1$$
$$c_2 = f_2(\gamma_0, \gamma_1) + h_2$$

Donde:

$$f_1(\gamma_0, \gamma_1) = \frac{\gamma_0 y_2'(0) - \gamma_1 y_2(0)}{\Delta}$$

$$f_2(\gamma_0, \gamma_1) = \frac{\gamma_1 y_1(0) - \gamma_0 y_1'(0)}{\Delta}$$

$$h_1 = \frac{G'(0) y_2(0) - G(0) y_2'(0)}{\Delta}$$

$$h_2 = \frac{G(0) y_1'(0) - G'(0) y_1(0)}{\Delta}$$

$$\Delta = y_1(0) y_2'(0) - y_2(0) y_1'(0)$$

Es posible expresar la solución única de (4) de la siguiente forma:

$$y(t) = f_1(\gamma_0, \gamma_1)y_1(t) + f_2(\gamma_0, \gamma_1)y_2(t) + \theta(t) \tag{5}$$

Para $\theta(t) = h_1\ y_1(t) + h_2\ y_2(t) + G(t)$.

La solución queda expresada en dos partes: la primera depende de las condiciones iniciales que son borrosas, incluye los valores de γ_0 y γ_1, mientras que la segunda θ es independiente de las mismas, de modo tal que:

$$\theta(t) = h_1 y_1(t) + h_2 y_2(t) + G(t)$$

Además, $\Delta \neq 0$ porque es el Wronskiano de la solución homogénea asociada evaluado en $t = 0$.

Para obtener $\tilde{Y}_e(t)$ se reemplazan γ_0 por $\widetilde{\gamma}_0$ y γ_1 por $\widetilde{\gamma}_1$ en (5) y se evalúa usando el Principio de Extensión.

$\tilde{Y}_e(t)$ será un número borroso de forma triangular, con α-cortes $Y_e(t,\alpha) = [y_{e1}(t,\alpha), y_{e2}(t,\alpha)]$, tales que:

$$y_{e1}(t,\alpha) = min\{f_1(\gamma_0,\gamma_1)y_1(t) + f_2(\gamma_0,\gamma_1)y_2(t) + \theta(t) / \gamma_0 \in \tilde{\gamma}_0(\alpha),\ \gamma_1 \in \tilde{\gamma}_1(\alpha), \forall t \in I, \alpha\ [0,1]\}$$

$$y_{e2}(t,\alpha) = max\{f_1(\gamma_0,\gamma_1)y_1(t) + f_2(\gamma_0,\gamma_1)y_2 t + \theta(t), \gamma_0 \in \tilde{\gamma}_0\,(\alpha),\ \gamma_1 \in \tilde{\gamma}_1(\alpha), \forall t \in I, \alpha \in [0,1]\}$$

Antes de afirmar que $\tilde{Y}_e(t)$ es una solución para el problema de valores iniciales borrosos, se deben cumplir más condiciones. Suponiendo que $y_{ei}(t,\alpha)\ i = 1, 2$ tienen primera y segunda derivada respecto de t para cada $\alpha \in [0,1]$, se dice que $\tilde{Y}_e(t)$ es una solución si $y_{ei}(t,\alpha),\ i = 1{,}2$ satisfacen la ecuación diferencial (4) y las condiciones iniciales:

$$y_{e1}(0,\alpha) = \gamma_{01}(\alpha),\ y'_{e1}(0,\alpha) = \gamma_{11}(\alpha),\ y_{e2}(0,\alpha) = \gamma_{02}(\alpha),\ y'_{e12}(0,\alpha) = \gamma_{12}(\alpha) \quad \forall\alpha \in [0,1]$$

Es sencillo probar que se satisfacen las condiciones iniciales, pero los $y_{ei}(t,\alpha),\ i = 1{,}2$ verificarán la ecuación diferencial (4) si se cumple la denominada "condición de intervalo". Para ello se definen los intervalos de la siguiente manera:

Si $I = [0, T]$, entonces los intervalos son $I_k = [\delta_{k-1}, \delta_k]$, $1 \leq k \leq K$con $0 = \delta_0 < \delta_1 < \cdots < \delta_K = T$

Si $I = [0, +\infty)$ entonces $0 = \delta_0 < \delta_1 < \cdots$ con $\delta_k \to \infty$ e $I_k = [\delta_{k-1}, \delta_k]\ k \geq 1$

La "condición de intervalo" se cumple si para cada intervalo I_k existen $\gamma_i^* \in \tilde{\gamma}_i(\alpha),\ \gamma_i^{**} \in \tilde{\gamma}_i(\alpha)$, $i = 0, 1$, que verifican:

$$y_{e1}(t,\alpha) = f_1(\gamma_0^*, \gamma_1^*)y_1(t) + f_2(\gamma_0^*, \gamma_1^*)y_2(t) + \theta(t)$$

$$y_{e2}(t,\alpha) = f_1(\gamma_0^{**}, \gamma_1^{**})y_1(t) + f_2(\gamma_0^{**}, \gamma_1^{**})y_2(t) + \theta(t), \forall t \in I_k, \forall k$$

Esto significa que f_1 y f_2 son independientes de t en cada intervalo I_k $\forall\alpha \in [0,1]$. Por lo tanto, para cada I_k, f_1 y f_2 son constantes para cada $\alpha \in [0,1]$ fijo y $y_{ei}(t,\alpha),\ \forall i = 1{,}2$ satisfacen la ecuación diferencial para $i = 1, 2$.

Buckley & Feuring (2001) demuestran que, para ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes la "condición de intervalo" se cumple siempre, por lo que $\tilde{Y}_e(t)$ es una solución al problema de valores iniciales borrosos.

3.2.2. Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes borrosos

En las ecuaciones diferenciales $y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b$, tal que $t \in I = [0, T], T > 0$ con condiciones iniciales $y(t_0) = \gamma_0$ e $y'(t_0) = \gamma_1$, puede ocurrir también que algún coeficiente, a_0, a_1, o alguna condición inicial, $\gamma_0,\ \gamma_1$ sea *fuzzy*. No se ha desarrollado aún un marco teórico general para estos casos porque presentan muchas dificultades (Buckley & Feauring, 2001; Buckley *et al*., 2010). Sin embargo, es importante su desarrollo, a pesar de la complejidad que presentan, dado que estos coeficientes son inciertos en numerosos contextos como el económico. En el apartado 5 se presentará una aplicación para el caso $a_2 = 0$ y a_1 un NBT.

4. Modelos económicos dinámicos continuos

Cómo se ha mencionado en el apartado 3.1, la solución general de $y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b$, tal que $b \neq 0$ es $y(t) = y_c(t) + y_p(t)$, donde $y_c(t)$ es la solución complementaria e $y_p(t)$ es una solución particular de la ecuación diferencial dada.

En los modelos económicos dinámicos continuos (Chiang, 1999; Gandolfo, 1976), $y_p(t)$ representa el nivel de equilibrio intertemporal e $y_c(t)$ la desviación del equilibrio. La estabilidad dinámica requiere que la desviación de la trayectoria temporal con respecto al equilibrio sea igual a cero o disminuya invariablemente con el tiempo, es decir $\lim_{t\to\infty} y_c(t) = 0$.

4.1. Trayectoria temporal del precio

4.1.1. Caso nítido

Determinar el precio de equilibrio entre la oferta y la demanda de un bien es un problema frecuente en el mercado (Balbás *et al.*, 1988).

Las cantidades ofrecidas y demandadas no dependen solamente de su precio, sino también de las expectativas sobre la evolución futura del mismo. La información sobre la tendencia del precio está dada por la derivada $P'(t)$ (tasa de variación del precio) y $P''(t)$ (indica como varía la tasa anterior).

Para tener en cuenta estimaciones futuras con respecto al nivel de precios, se consideran la demanda y la oferta como funciones del precio y de sus derivadas.

$$D(t) = f(P(t), P'(t), P''(t)) \text{ representa la demanda}$$

$$S(t) = f(P(t), P'(t), P''(t)) \text{ representa la oferta}$$

Si se consideran funciones lineales la demanda y la oferta quedan expresadas:

$$D(t) = a_3 P''(t) + a_2 P'(t) + a_1 P(t) + a_0$$

$$S(t) = b_3 P''(t) + b_2 P'(t) + b_1 P(t) + b_0$$

Para determinar el punto de equilibrio se igualan oferta y demanda $D(t) = S(t)$:

$$a_3 P''(t) + a_2 P'(t) + a_1 P(t) + a_0 = b_3 P''(t) + b_2 P'(t) + b_1 P(t) + b_0$$

$$(a_3 - b_3)P''(t) + (a_2 - b_2)P'(t) + (a_1 - b_1)P(t) = b_0 - a_0$$

Si $\left(a_3 - b_3\right) \neq 0$ $\quad P''(t) + \frac{(a_2 - b_2)}{a_3 - b_3} P'(t) + \frac{(a_1 - b_1)}{a_3 - b_3} P(t) = \frac{b_0 - a_0}{a_3 - b_3}$ representa una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes completa.

Su solución bajo las condiciones iniciales $P(0) = P_0$ y $P'(0) = P_1$ será la trayectoria temporal del precio $P(t)$.

Sean las funciones de demanda y oferta, respectivamente:

$$D(t) = 4P''(t) + 2P'(t) - P(t) + 80$$

$$S(t) = 5P''(t) + 5\,P'(t) + \,P(t) - 40$$

con las condiciones iniciales $P(0) = \$8$ y $P'(0) = \$1$

Igualando las cantidades ofrecidas a las demandadas, se obtiene una ecuación diferencial de 2º orden con coeficientes constantes:

$$P''(t) + 3\,P'(t) + 2P(t) = 120 \tag{6}$$

con las condiciones iniciales $P(0) = \$8$ y $P'(0) = \$1$

La solución complementaria es: $P_c(t) = 21e^{-2t} - 43e^{-t}$ y la solución particular es $P_p(t) = 30$. Por lo tanto, la solución general (en unidades monetarias) es

$$P(t) = 21e^{-2t} - 43e^{-t} + 30$$

Como $\lim_{t\to\infty} P(t) = 30$, la trayectoria temporal del precio, con precio inicial de \$8, converge al precio de equilibrio intertemporal $P_p(t) = \$30$ que es la solución particular de la ecuación diferencial (6).

4.1.2. Caso con incertidumbre

Supongamos que en el mismo modelo no se conoce con certeza el precio inicial, pero se puede estimar que no será menor que \$7 ni mayor que \$9, mientras que el valor más posible es \$8. Entonces, podemos expresar $P(0) = \tilde{\gamma}_0$, donde $\tilde{\gamma}_0 = (7{,}8{,}9)$ es un NBT.

Análogamente, el precio marginal inicial es incierto, pero se sabe que toma un valor mínimo de \$0, un valor máximo de \$2 y un valor más posible de \$1. Por lo tanto, el precio marginal inicial queda expresado por el NBT $P'(0) = \tilde{\gamma}_1 = (0{,}1{,}2)$.

Los α-cortes de $\tilde{\gamma}_0$ y $\tilde{\gamma}_1$, son:

$$\gamma_{0\propto} = [\alpha + 7, -\alpha + 9]$$
$$\gamma_{1\propto} = [\alpha, -\alpha + 2]$$

La solución clásica de la ecuación diferencial (6) considerando condiciones iniciales borrosas, de acuerdo con lo expuesto en IV es un número borroso $\widetilde{P_c}(t)$ para todo $t \in I$ con α-cortes

$$\tilde{P}_C(t, \alpha) = [p_{C1}(t, \alpha), p_{C2}(t, \alpha)] \ \forall t \in I, \alpha \in [0{,}1]$$

donde $p_i(t, \alpha), i = 1; 2$ tiene derivadas respecto a *t* hasta segundo orden. Sustituyendo los α-cortes de $\tilde{P}_C(t, \alpha)$ en (6):

$$[p_1''(t, \alpha), p_2''(t, \alpha)] + 3\,[p_1'(t, \alpha), p_2'(t, \alpha)] + 2\,[p_1(t, \alpha), p_2(t, \alpha)] = [120{,}120]$$

Si se aplica aritmética de intervalos se obtienen dos ecuaciones diferenciales con dos incógnitas: $p_1(t, \alpha)$ y $p_2(t, \alpha)$:

$$p_i''(t, \alpha) + 3\,p_i'(t, \alpha) + 2p_i\,(t, \alpha) = 120 \quad i = 1, 2 \tag{7}$$

La solución general de las ecuaciones diferenciales dadas en (7), son:

$$p_1(t, \alpha) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} + 30$$
$$p_2(t, \alpha) = C_3 e^{-2t} + C_4 e^{-t} + 30$$

Se reemplaza por las condiciones iniciales para obtener las constantes $C_i / i = 1 \ldots 4$

$$\begin{cases} \alpha + 7 = C_1 + C_2 + 30 \\ \alpha = -2C_1 - C_2 \\ -\alpha + 9 = C_3 + C_4 + 30 \\ -\alpha + 2 = -2C_3 - C_4 \end{cases}$$

$$C_1 = -2\alpha + 23\,, \qquad C_2 = 3\alpha - 46, \qquad C_3 = 2\alpha + 19 \qquad C_4 = -3\alpha - 40$$
$$p_{C1}(t, \alpha) = (-2\alpha + 23)e^{-2t} + (3\alpha - 46)e^{-t} + 30$$
$$p_{C2}(t, \alpha) = (2\alpha + 19)e^{-2t} + (-3\alpha - 40)e^{-t} + 30$$

Se analizan las condiciones para la existencia de la solución clásica para:

$$\tilde{P}_C(t, \alpha) = [p_{C1}(t, \alpha), p_{C2}(t, \alpha)] \ \forall t \in I, \alpha \in [0{,}1]$$

i) $p_{Ci}(t, \alpha)$ $i = 1{,}2$ derivables respecto de α

ii) $\frac{\partial p_{C1}}{\partial \alpha} = e^{-2t}(-2 + 3e^t) > 0 \forall t \geq 0$ (Figura 1)

iii) $\frac{\partial p_{C2}}{\partial \alpha} = e^{-2t}(2 - 3e^t) < 0 \forall t \geq 0$ (Figura 2)

iv) $p_{C1}(t, 1) = p_{C2}(t, 1) = 21e^{-2t} - 43e^{-t} + 30$

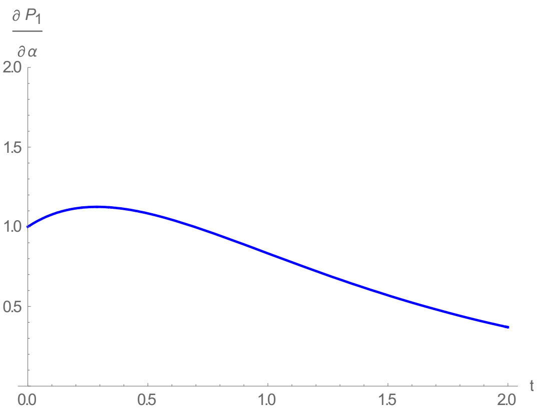

Figura 1. $\boldsymbol{\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}}$

Fuente: elaboración propia.

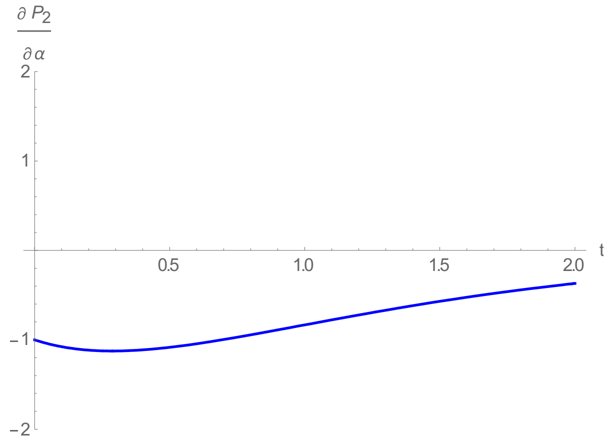

Figura 2. $\boldsymbol{\frac{\partial p_2}{\partial \alpha}}$

Fuente: elaboración propia.

Por lo tanto, se cumplen las condiciones para la existencia de la solución clásica

$$\tilde{P}_C(t,\alpha) = [p_1(t,\alpha), p_2(t,\alpha)]\ \forall t \in I, \alpha \in [0,1]$$

En la Figura 3 se muestran los α -cortes de nivel 0 y 1 correspondientes a $\tilde{P}_C(t,\alpha)$.

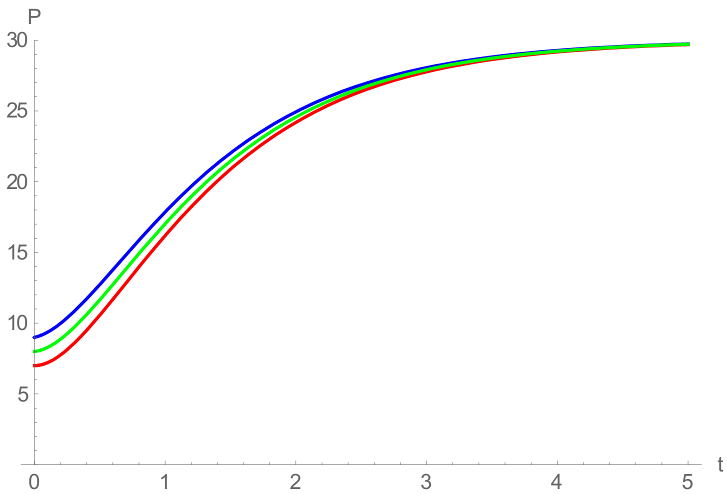

Figura 3. α-cortes de nivel 0 y 1 para la trayectoria temporal $\boldsymbol{\widetilde{P}_C(t,\alpha)}$

Fuente: elaboración propia.

A su vez $\lim_{t\to\infty} \widetilde{P_c}\,(t) = 30$, o sea la borrosidad desaparece para *t* tendiendo a infinito y el precio converge a \$30. Las condiciones iniciales borrosas no inciden en la tendencia del precio cuando $t \to \infty$.

4.2. Trayectoria temporal de la deuda nacional

4.2.1. Caso nítido

Domar planteó un modelo (Weber, 1984, Phagouapé, 1976, Allen 1960) para representar las relaciones entre la renta nacional y la deuda nacional. Expresado en términos de ecuaciones diferenciales es:

$$\begin{cases} D'(t) = a\,y(t) \\ y'(t) = m\,y(t) \end{cases} \text{ donde } 0 < a < 1 \; y \;\; 0 < m < 1$$

Donde $D(t)$ representa la deuda nacional e $y(t)$ el ingreso o renta nacional.

La primera ecuación indica que la tasa de endeudamiento es una proporción fija del flujo de ingreso, mientras que este último varía también en una proporción fija de su propio valor a través del tiempo.

Además, las condiciones iniciales son:

$$D(0) = D_0 \;\; y\; D'(0) = a\,y_0$$

De este modelo surge la ecuación diferencial de 2º orden con coeficientes constantes homogénea:

$$D''(t) - m\,D'(t) = 0 \tag{8}$$

La solución general de dicha ecuación diferencial es:

$$D(t) = C_1 + \; C_2\,e^{mt}$$

Para las condiciones iniciales dadas, la evolución temporal de la deuda nacional es:

$$D(t) = D_0 + \frac{a}{m}\,y_0\,(\,e^{mt} - 1) \tag{9}$$

Además, podemos obtener de la segunda ecuación del modelo, la trayectoria temporal del ingreso, con la condición inicial $y(0) = y_0$:

$$y(t) = y_0\,e^{mt}$$

De (8) se puede concluir que la deuda crece continuamente y también el ingreso, dado que:

$$\lim_{t\to\infty} D(t) = \infty \qquad\qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$$

En este modelo es de especial interés el análisis de la relación entre la deuda y el ingreso nacional:

$$B(t) = \frac{D(t)}{y(t)}$$

$$\frac{D(t)}{y(t)} = \frac{D_0 + \dfrac{a}{m}\,y_0\,(\,e^{mt} - 1)}{y_0\,e^{mt}}$$

$$\frac{D(t)}{y(t)} = \frac{D_0}{y_0\,e^{mt}} + \frac{a}{m}\;\left(1 - \frac{1}{e^{mt}}\right)$$

Para *t* tendiendo a 0, surge la cota inferior del cociente:

$$\lim_{t\to 0} \frac{D(t)}{y(t)} = \frac{D_0}{y_0}$$

Por otro lado, para *t* tendiendo a infinito, Como $\frac{D_0}{y_0\, e^{mt}} \to 0$ y $\frac{a}{m}\ (1-\frac{1}{e^{mt}}) \to \frac{a}{m}$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{D(t)}{y(t)} = \frac{a}{m} \tag{10}$$

Como conclusión, la relación entre la Deuda Nacional y el Ingreso, $B(t) = \frac{D(t)}{y(t)}$, tenderá a estabilizarse en un valor asintótico $\frac{a}{m}$ cuando t tiende a infinito, lo cual asegura una cota superior de la misma.

Se considera un caso de estudio.

$$\begin{cases} D'(t) = 0.25\ y(t) \\ y'(t) = m\, y(t) \quad m > 0 \\ D(0) = 50 \quad D'(0) = 25 \end{cases} \tag{11}$$

$D(t)$ representa la deuda nacional e $y(t)$ la renta nacional. La primera ecuación de (11) indica que la variación de la deuda nacional es un 25% de la renta; mientras que la variación de la renta es una proporción fija m de la renta actual. En la 3ra ecuación se detallan los valores de la deuda y de la deuda marginal para $t_0 = 0$.

Como $D'(0) = 0.25\, y_0$, $y_0 = 100$

Al derivar la primera ecuación del sistema (10) respecto a t queda:

$$D''(t) = 0.25\ y'(t)$$

Reemplazando la segunda ecuación del sistema (10) en la expresión anterior, queda una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes incompleta y homogénea con parámetro m.

$$D''(t) - m\, D'(t) = 0$$

Para las condiciones iniciales dadas, la trayectoria temporal de la deuda nacional es:

$$D(t) = 50 + 25\frac{e^{mt}-1}{m} \tag{12}$$

Por otro lado, de la segunda ecuación diferencial de primer orden del modelo, surge la trayectoria temporal del ingreso nacional:

$$y(t) = 100\, e^{mt}$$

Además, la relación entre deuda e ingreso, $B(t)$, es:

$$B(t) = \frac{D(t)}{y(t)} = \frac{50}{100\, e^{mt}} + \frac{0.25}{m}\ (1 - \frac{1}{e^{mt}})$$

Las cotas inferior y superior de $B(t)$ son:

$$\lim_{t\to 0} B(t) = \lim_{t\to 0} \frac{D(t)}{y(t)} = \frac{D_0}{y_0} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \tag{13}$$

$$\lim_{t\to\infty} B(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{D(t)}{y(t)} = \frac{a}{m} = \frac{0.25}{m}$$

Si se considera $m = 0.3$, es decir que el ingreso nacional varía 30 % de su renta actual, $B(t)$ tenderá a estabilizarse en $0.8\hat{3}$ cuando t tiende a infinito. En la Figura 4 se representa la deuda nacional y en la Figura 5 el ingreso nacional, ambos casos para $m = 0.3$.

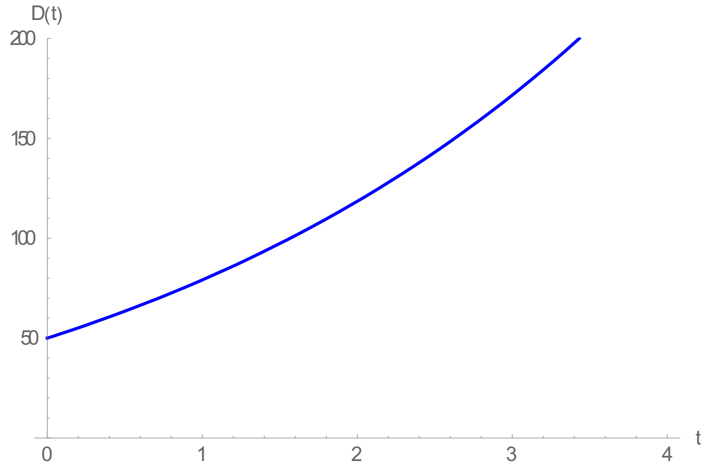

Figura 4. Trayectoria temporal de la deuda nacional para *m* = 0.3
Fuente. elaboración propia.

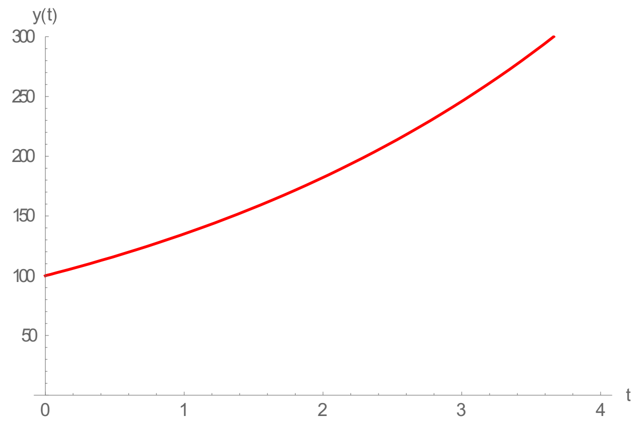

Figura 5. Trayectoria temporal del ingreso nacional para *m* = 0.3
Fuente. elaboración propia.

4.2.2. Caso con incertidumbre

Si la variación del ingreso está definida por una proporción incierta del valor de la renta actual, y se puede determinar un valor mínimo, uno máximo y el más posible de esta proporción, entonces se puede representar el parámetro m con un NBT.

Sea $\widetilde{M} = (0.2, 0.3, 0.4)$ con α-cortes $M_\alpha = [0.1\alpha + 0.2\,, -0.1\alpha + 0.4]$.

Para hallar la solución clásica $\widetilde{D}_C$ se debe hacer borrosa la ecuación nítida (8) y luego resolverla. Dadas las condiciones iniciales nítidas, la solución, si existe, será un número borroso $\widetilde{D}_C(t)$ para todo $t \in I$ con α-cortes

$$D_C(t, \alpha) = [d_{C1}(t, \alpha), d_{C2}(t, \alpha)]\ \forall t \in I, \alpha \in [0,1]$$

donde $d_{Ci}(t, \alpha), i = 1; 2$ tienen derivadas respecto a *t* hasta segundo orden. Sustituyendo los α-cortes de $D_C(t, \alpha)$ y sus derivadas en (8):

$$[d_{C1}''(t, \alpha), d_{C2}''(t, \alpha)] - M_\alpha\, [d_{C1}'(t, \alpha), d_{C2}'(t, \alpha)] = [0,0]$$

Si se aplica aritmética de intervalos en la última expresión, considerando que $\widetilde{M}$ y $\widetilde{D}'$ son mayores que 0, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden con dos incógnitas: $d_{C1}(t,\alpha)$ y $d_{C2}(t,\alpha)$.

$$d''_{C1}(t,\alpha) - (-0.1\,\alpha + 0.4)\; d'_{C2}(t,\alpha) = 0$$
$$d''_{C2}(t,\alpha) - (0.1\,\alpha + 0.2)\;\; d'_{C1}(t,\alpha) = 0$$

Dada la complejidad para resolver este sistema de ecuaciones diferenciales y la posibilidad que la solución hallada no defina un número borroso para las condiciones iniciales dadas, se calculará la solución basada en el Principio de Extensión, que sabemos que siempre existe.

La solución nítida de la ecuación diferencial del modelo planteado, dada en (12) es

$$D(t) = 50 + 25\frac{e^{mt}-1}{m}, \text{ donde } \frac{\partial D}{\partial m} > 0 \forall t \geq 0$$

Se emplea el Principio de Extensión para obtener $\widetilde{D}_e(t)$:

$$D_e(t,\alpha) = [d_{e1}(t,\alpha), d_{e2}(t,\alpha)]$$

$$d_{e1}(t,\alpha) = 50 + 25\frac{e^{(0.1\alpha+0.2)t}-1}{0.1\alpha+0.2} \qquad d_{e2}(t,\alpha) = 50 + 25\frac{e^{(-0.1\alpha+0.4)t}-1}{-0.1\alpha+0.4}$$

En la Figura 6 se muestran los α-cortes de $\widetilde{D}_e(t)$ para $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$.

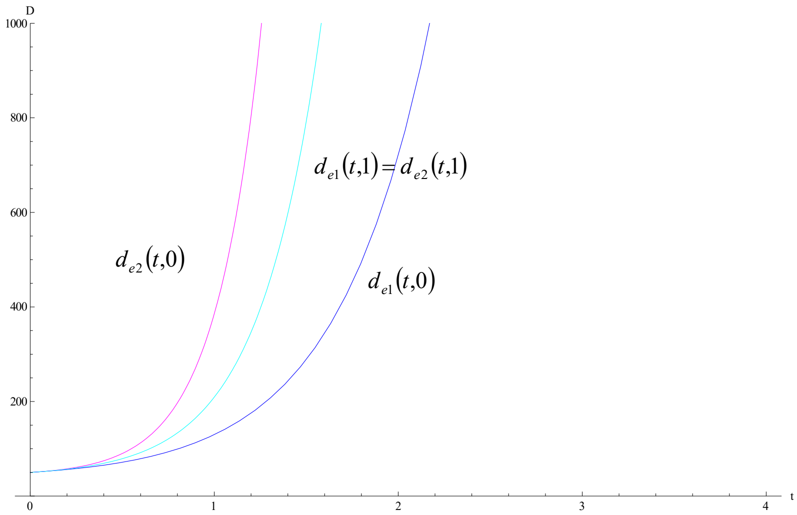

Figura 6. α-cortes de nivel 0 y 1 para la trayectoria temporal $\widetilde{D}_e(t)$

Fuente: elaboración propia.

Se puede observar que la diferencia entre $d_{e1}(t,\alpha)$ y $d_{e2}(t,\alpha)$ aumenta cuando $t \to \infty$. Además, si se fija un nivel de la deuda se podrá encontrar el intervalo de tiempo dentro del cual tomará el valor fijado.

Por otro lado, el ingreso nacional es:

$$y(t) = 100\, e^{mt} \text{ donde } \frac{\partial y}{\partial m} > 0\; \forall t \geq 0$$

Como $y(t)$ depende del parámetro borroso, se emplea el Principio de Extensión para obtener sus α-cortes.

$$\widetilde{Y}_e(t) = [y_{e1}(t,\alpha); y_{e2}(t,\alpha)\,]$$

Donde

$$y_{e1}(t,\alpha) = 100\, e^{(0.1\,\alpha+0.2)t}$$
$$y_{e2}(t,\alpha) = 100\, e^{(-0.1\alpha+0.4)t}$$

En la Figura 7 se muestra los α-cortes de $\widetilde{y}_e(t)$ para $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$

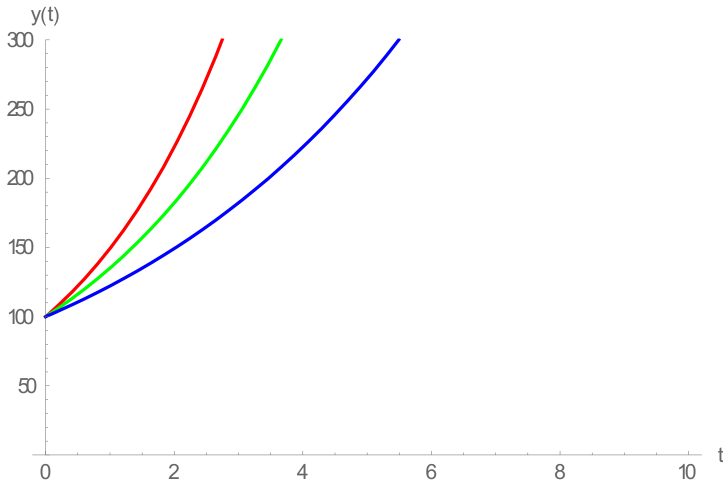

Figura 7. α-cortes de nivel 0 y 1 para la trayectoria temporal $\widetilde{y_e}(t)$
Fuente: elaboración propia.

Para el parámetro m incierto y expresado por el NBT, la cota inferior de $B(t)$ no varía y es igual a 0.5 (13), mientras que la cota superior por (10) es:

$$\lim_{t\to\infty} B(t) = \frac{0.25}{m}$$

$$\lim_{t\to\infty} B(t) = \left(\frac{0.25}{-0.1\alpha+0.4}; \frac{0.25}{0.1\alpha+0.2}\right) \tag{14}$$

Se observa que para el caso en el que el parámetro m sea incierto y esté expresado por el NBT $\widetilde{M} = (0.2,0.3,0.4)$ la relación entre la deuda y el ingreso tenderá a estabilizarse cuando t tienda a infinito en un valor asintótico no menor que 0.625, no mayor que 1.25, y uno más posible de $0.8\hat{3}$, que corresponden al número borroso de forma triangular $\tilde{C} \approx (0.625, 0.8\hat{3}, 1.25)$ expresado por sus α-cortes en (14).

5. Comentarios finales

La teoría de conjuntos borrosos permite construir modelos adecuados a partir de realidades inciertas que presentan vaguedad de forma intrínseca, es decir que cualquier intento de hacer exactos los elementos utilizados lleva a una simplificación que cambia los términos en los que se plantean los problemas o conduce a soluciones no reales.

En este trabajo se han analizado aplicaciones de la dinámica económica que se modelizan a través de la ecuación diferencial $y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = g(t)/t \in I = [0,T], T > 0 \wedge g(t)$ continua en I, en un primer caso para condiciones iniciales nítidas y borrosas; y en un segundo caso para condiciones iniciales nítidas con un parámetro cierto y borroso.

Para las ecuaciones diferenciales borrosas consideradas en este trabajo, Buckley & Feuring (2001) demostraron que la solución clásica no siempre existe, pero si es posible hallar en todos los casos la solución basada en el Principio de Extensión, además para $a_1, a_0 > 0$, si $\tilde{Y}_c(t)$ existe, entonces $\tilde{Y}_c(t) \leq \tilde{Y}_e(t)$.

En el primer caso analizado de la trayectoria temporal del precio en condiciones de incertidumbre se puede observar que $\lim_{t\to\infty} \widetilde{P_c}(t) = 30$, por lo que las condiciones iniciales borrosas no inciden en la tendencia del precio cuando $t \to \infty$.

En el modelo de Domar presentado, tanto para el parámetro m nítido como incierto (expresado por un NBT) se verifica que el cociente entre $D(t)$ e $y(t)$ está acotado siempre que el ingreso tenga una tasa proporcional a su valor para afrontar la creciente deuda, donde m gobierna el crecimiento del ingreso nacional. Si m es un número cierto el cociente tenderá a un número real cuando $t \to \infty$, mientras que, si m es un NBT, el cociente tenderá a un número borroso de forma triangular.
Queda pendiente avanzar en el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales en situaciones de incertidumbre para ser utilizadas en la resolución de otro tipo de problemas con variables borrosas, además de los presentados en este trabajo.

Referencias

Allen, R. G. D. (1960). Mathematical Economics. New York: Macmillan & Co. Ltd.

Allende Espinosa, A. (2021). Incertidumbre económica en el largo plazo: Un estudio de sus consecuencias. Tesis de grado en Finanzas, banca y seguros, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Valladolid. España.

Apostol, T. (1999). Calculus. Volumen 2. México: Reverté S.A.

Balbás De La Corte, A., Gil Fana, J.A., & Gutiérrez Valdeón, S. (1988). Análisis Matemático para la Economía II. Cálculo integral y sistemas dinámicos, Madrid: AC, Thomson.

Billot, A. (1995). Economic Theory of fuzzy Equilibria. An Axiomatic Analysis, Heidelberg: Springer.

Buckley, J.J. (1992). Solving fuzzy equations. *Fuzzy Sets and Systems*, *50*, 1-14.

Buckley, J., & Qu, Y. (1991). Solving fuzzy equations: A new concept. *Fuzzy Sets and Systems*, *39*, 291-301.

Buckley, J., & Feuring, T. (2000). Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems, 110*, 43-54.

---- (2001). Fuzzy initial value problem for Nth-order linear differential equations. *Fuzzy Sets and Systems, 121*, 247-255.

Buckley, J., Eslami, & E., Feuring, T. (2010). Fuzzy Mathematics in Economics and Engineering. Heidelberg: Physica-Verlag.

Chiang, A. (1999). Métodos Fundamentales de Economía Matemática. México: McGraw-Hill.

Gandolfo, G. (1976). Métodos y modelos matemáticos de la dinámica económica. Madrid: Tecnos.

Kaufmann, A., & Gupta, M. (1985). Introduction to Fuzzy Arithmetic. New York: Van Nostrand Reinhold Company.

Klir, G., & Yuan, B. (1995). Fuzzy sets and fuzzy logic. Theory and Applications. USA: Prentice-Hall PTR.

Lazzari, L., & Moriñigo, M. S. (2004). El enfoque de Buckley del modelo de insumo-producto en condiciones de incertidumbre. *Cuadernos del CIMBAGE*, *6*, 93-109.

Lazzari, L., Mouliá, P., y Eriz, M. (2009). Herramientas matemáticas innovadoras para la maximización de la utilidad. *Cuadernos del CIMBAGE, 11*, 1-24.

Lazzari, L., Moulia, M., & Chiodi, J. (2015). Funciones económicas en un entorno incierto. *Revista Científica Visión de Futuro*. *19*(2), 113-131.

Lazzari, L., Fernández, M. J., & Moulia, P. (2020). Welfare subjective evaluation. Application to health system access. *Fuzzy Economic Review*, *25*(2), 67-83.

Lazzari, L. (2010). El comportamiento del consumidor desde una perspectiva fuzzy. Una aplicación al turismo. Buenos Aires: Editorial Consejo Profesional de Ciencias Económicas (EDICON).

Ouyang, H., & Wu, Y. (1989). On fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and* Systems, *32*, 321-325.

Parma, A., & Fernández, M. J. (2016). Ecuaciones diferenciales borrosas lineales de primer orden y su aplicación al modelo de Sachs. *Análisis Económico, XXXI* (78), 93-124

Park, J. Y., & Han, H.K. (2000). Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems, 110*, 69-77.

Perez, C., Vazquez, F., & Vegas, J. (2003). Ecuaciones diferenciales y en diferencias: sistemas dinámicos. Madrid: Paraninfo.

Phagouapé, A. (1976). Conexión entre modelos económicos mediante técnicas matemáticas afines. *Revista de Economía y estadística,* Tercera Época, *20*(1), 95-109.

Ramik, J. (1986). Extension Principle in fuzzy optimization. *Fuzzy Sets and Systems*, *19*, 29-35.

Tanaka, K. (1997). An introduction to Fuzzy Logic for practical applications. New York: Springer-Verlag.

Tarrazo, M. (2001). Practical Applications of Approximate Equations in Finance and Economics. Westport, CT: Quorum Books.

Vorobiev, D., & Seikkala, S. (2002). Towards the theory of fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, *125*, 231-237.

Weber, J. E. (1984). Matemáticas para administración y economía. Harla: México.

Ying-Ming, L., & Mao-Kang, L. (1997). Fuzzy Topology. Singapur: World Scientific.

Zadeh, L. (1975). The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning-I, *Information Sciences*, *8*, 199-249.

Sobre los Documentos de Trabajo

La serie de Documentos de Trabajo del IIEP refleja los avances de las investigaciones realizadas en el instituto. Los documentos pasan por un proceso de evaluación interna y son corregidos, editados y diseñados por personal profesional del IIEP. Además de presentarse y difundirse a través de la página web del instituto, los documentos también se encuentran disponibles en la biblioteca digital de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires, el repositorio digital institucional de la Universidad de Buenos Aires, el repositorio digital del CONICET y en la base IDEAS RePEc.

.UBA Universidad de Buenos Aires

CONICET

IIEP

INSTITUTO INTERDISCIPLINARIO
DE ECONOMÍA POLÍTICA

Universidad de Buenos Aires | Facultad de Ciencias Económicas

Av. Córdoba 2122 1º y 2º piso (C1120 AAQ)
Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina
+54 11 5285-6578 | www.iiep.economicas.uba.ar

@iiep_oficial