

# ÁRBOLES BINOMIALES IMPLÍCITOS, MOMENTOS ESTOCÁSTICOS DE ORDEN SUPERIOR Y VALUACIÓN DE OPCIONES

---

Gastón Milanesi\*  
*Universidad Nacional del Sur*

Fernando Tohmé\*\*  
*Universidad Nacional del Sur*

## RESUMEN

Los Árboles Binomiales Implícitos permiten inferir, empleando precios de mercado, las probabilidades asociadas a los valores nodales finales proyectados del subyacente. A diferencia del modelo binomial, esta propuesta incorpora momentos de orden superior (asimetría y curtosis). Tomando el caso de valuación de una opción financiera negociada en el mercado local se expone: a) los pasos necesarios para la construcción de la rejilla binomial implícita, b) Se comparan los resultados con el clásico modelo binomial, c) se presenta un caso de valuación de opción de diferir en un contrato de concesión para extracción de materia prima.

*Palabras clave: Rejillas Binomiales Implícitas; Momentos estocásticos de Orden Superior; Opciones Financieras; Opciones Reales.*

## ABSTRACT

Using market prices, the Implied Binomial Tree allowed deduces the likelihood associate to the project nodal last values of the underlying. Unlike the binomial model, this proposes incorporates higher moments (skewness and kurtosis). Taking the valuation case of a financial option trades in the local market, its exposes: a) The necessary steps for the construction of implied binomial lattice, b) The results are compares with the classic binomial model; c) It's shows a valuation case for an option of differ in an extraction raw material concession contract.

*Key words: Implied Binomial Lattice, Higher Order Stochastic Moments; Financial Options, Real Options.*

---

\* *Universidad Nacional del Sur (UNS) - Departamento de Ciencias de la Administración. Bahía Blanca, Buenos Aires, Argentina. milanesi@uns.edu.ar*

\*\* *Universidad Nacional del Sur (UNS) - Departamento de Economía. Bahía Blanca, Buenos Aires, Argentina. ftohme@criba.edu.ar*

*Clasificación JEL: G13, G31, C44, C16.*

---

## **I. Momentos estocásticos de orden superior y modelos de valuación de opciones**

Los tradicionales modelos empleados para la valoración de opciones suponen comportamiento lognormal del proceso estocástico correspondiente al subyacente fijando exógenamente momentos estocásticos de orden inferior (Black y Scholes, 1972; Black y Scholes, 1973; Merton, 1973; Cox y Ross, 1976; Cox, Ross y Rubinstein; 1979). Estos suponen un proceso estocástico del tipo geométrico browniano respecto de la evolución del valor correspondiente al subyacente. La distribución de probabilidad de los precios del activo es binomial en tiempo discreto y lognormal en comportamiento continuo. Si bien el supuesto de normalidad se encuentra ampliamente difundido, es sabido que muchos fenómenos, entre ellos el comportamiento de los activos financieros no se ajustan a la pautas indicadas (Taleb, 2007). Esta situación conlleva a errores en la estimación de valor, al omitir los momentos de orden superior impar y par.

Una manera de resolver estos problemas, sin sacrificar la elegancia y simplicidad del método binomial, consiste en inferir la distribución de probabilidad y los momentos de orden superior a partir de los precios de mercado. Los primeros trabajos se remontan a las primeras investigaciones relativas a inferir las probabilidades que corresponden a preferencias neutrales al riesgo y precios de estados contingentes a partir de las opciones (Ross, 1976; Breeden y Litzenberger, 1978). A partir de estas ideas se propusieron métodos para estimar las probabilidades implícitas finales correspondiente a neutralidad al riesgo de las rejillas estocásticas y el proceso estocástico implícito a través del precio de las opciones (Shimko, 1993; Rubinstein, 1994; Rubinstein, 1998; Arnold, Crack, y Schwartz, 2004).

El aporte del modelo conocido como *Implied Binomial Tree* (IBT) reside en que posibilita trabajar con los cuatro primeros momentos estocásticos debido a que infiere las probabilidades de ocurrencia a partir de los precios correspondientes al derivado financiero. A diferencia del tradicional modelo binomial (CRR, Cox-Ross-Rubinstein) los parámetros  $p$ ,  $1-p$ ,  $u$  y  $d$  no permanecen constantes. La valoración basada en probabilidades implícitas, al trabajar con la información contenida en los precios de las opciones, recoge e incorpora las expectativas del mercado vinculadas al proceso

---

estocástico supuesto por los agentes. Para su estimación la secuencia lógica de pasos a seguir es la siguiente (Arnold, *et al.*, 2004):

1. El principal insumo está dado por el precio de mercado correspondiente a opciones financieras negociadas con el mismo vencimiento y sobre el subyacente.
2. La volatilidad se estima de forma implícita en base al clásico modelo BMS (Black-Merton-Scholes).
3. Es proyectado el proceso estocástico del activo empleando los parámetros CRR con la volatilidad implícita obtenida en el paso anterior.
4. Se emplea un argumento iterativo de optimización para valuar las opciones con el mínimo error y calibrar el IBT.

El objetivo es determinar probabilidades implícitas para un nodo terminal cualquiera, de ahora en más  $Q^*_j$ , para luego valuar el subyacente y consecuentemente el derivado en cuestión. En el trabajo se estimará el IBT y la valuación del derivado adaptando los conceptos y métodos propuestos por Rubistein (1998) y Arnold *et al.* (2004). Los resultados obtenidos serán evaluados a la luz de aquellos derivados del clásico modelo CRR.

## II. Estimación de un árbol binomial implícito (IBT) y valoración de la opción de compra. Un caso de aplicación en el mercado local.

### II.1. Variables del ejemplo

A modo de ejemplo fue seleccionada una opción de compra americana que no paga dividendos<sup>1</sup> sobre la acción Tenaris (TSC110AGO). La fecha de valuación es al 10 de junio del 2011 y fue utilizada información suministrada por el Instituto Argentino de Mercados de Capitales (IAMC)<sup>2</sup> en su reporte diario correspondiente a la fecha de valoración. El vencimiento de los contratos es el 19 de agosto del 2011, duración nominal a fecha de valuación 70 días, y con precios de ejercicio pactado de \$102; \$106; \$110 y

---

1. Por lo tanto su tratamiento es similar al de una opción de compra europea en donde el subyacente no paga dividendos (Hull, 2005).

2. Recuperado desde: [www.iamc.com.ar](http://www.iamc.com.ar):

<http://www.iamc.sba.com.ar/Imgs/Dyn/ArchivosLenguajes/6944-2011-6-10T18-30-0.pdf>

---

\$118 y valor contado (*spot*) de \$100. Como *proxy* del tipo sin riesgo es utilizada la tasa BAIBAR (9,33% efectivo anual). El periodo de tiempo total<sup>3</sup> ( $t$ ) se dividió en 10 intervalos ( $n=10$ ).

En el Cuadro No.1 se sintetizan precios de ejercicio, primas promedios y precios de compra-venta correspondientes a los derivados.

**Cuadro No. 1: Ejercicio, precio de venta-compra de la prima y opción de compra promedio**

Ejercicio:	\$ 102,00	\$ 106,00	\$ 110,00	\$ 118,00
Ask Price:	\$ 3,50	\$ 2,60	\$ 1,50	\$ 0,65
Bid Price:	\$ 3,20	\$ 2,25	\$ 1,30	\$ 0,65
Call medio	\$ 3,35	\$ 2,43	\$ 1,40	\$ 0,65

*Fuente: elaboración propia.*

## II.2. Estimación de la volatilidad implícita

Valorar implica respetar la homogeneidad en las fuentes y métodos de obtención de variables de entrada. Si el fin del experimento consiste en trabajar con probabilidades implícitas, el riesgo debe ser estimado con similar coherencia. A menudo la volatilidad implícita es utilizada como reemplazo de su par calculado con datos históricos, especialmente en aquellos casos donde se persigue controlar el riesgo vinculado a un activo subyacente en particular (Hull, 2005). Lamentablemente no es posible despejar  $\sigma$  (el resultado buscado) en función de las variables activo subyacente ( $S$ ), precio de ejercicio ( $X$ ), tipo sin riesgo ( $r$ ) y valor de la opción ( $c$ ). En este caso se debe implementar un proceso iterativo donde la volatilidad surge de igualar el precio de mercado observado y el valor teórico obtenido por el modelo Black-Merton-Scholes (BMS) (Black, y Scholes, 1973; Merton, 1973). Los pasos involucrados son los siguientes:

*Primero:* calcular el valor teórico de una opción de compra europea que no paga dividendos empleando el modelo de BMS:

$$c = \left[ S_0 N(d_1) \right] - \left[ X e^{-r \times t} N(d_2) \right] \quad (1)$$

3. En este caso  $t$  equivale a 70 días, a los efectos de la sincronización de las unidades de medida (expresadas en términos anuales),  $t$  equivale a la proporción que esta representa sobre el año ( $t/yy$ ). La cantidad de pasos se refleja en  $n$ , en este caso 10.

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left[r + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\right]t}{\sigma\sqrt{t}} \quad (2)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} \quad (3)$$

En este caso  $S$  es el precio del subyacente,  $X$  el precio de ejercicio,  $N(d_1)$  y  $N(d_2)$  los coeficientes de probabilidad en el dinero de la ecuación (Copeland, Weston y Shastri, 2005),  $r$  el tipo sin riesgo,  $t$  el horizonte temporal y  $\sigma$  la volatilidad.

*Segundo:* la volatilidad implícita se determina iterando la variable objetivo (volatilidad) hasta lograr el máximo ajuste entre valor teórico y valor de mercado observado. En el presente trabajo se utilizó el aplicativo Microsoft Excel®, menú de datos función buscar objetivo, de la siguiente manera:

- a. Definir celda a calibrar: la variable que debe converger al precio observado de mercado es el valor teórico de la opción de compra calculado mediante la ecuación de BMS.<sup>4</sup>
- b. Establecer el precio objetivo: El promedio entre el valor de compra (*ask*) y venta (*bid*) observado en el mercado para cada contrato. La restricción representa el valor al que debe llegar el resultado de la ecuación BMS (paso 1, definición de la variable a cambiar).
- c. Cambio de variable: La incógnita del modelo BMS es la volatilidad, siendo esta el parámetro de la ecuación que se somete a iteración. Por lo tanto, la celda seleccionada resulta ser aquella donde se define el valor del desvío estándar.
- d. Proceso de iteración: Culmina cuando el valor arrojado por la ecuación BMS coincide con el promedio entre los precios correspondientes a las puntas vendedoras y compradoras del contrato. El objetivo consiste en minimizar la diferencia entre el precio observado y el valor teórico, aproximando al cociente: (*call* medio/*call* teórico)-1.<sup>5</sup>

---

4. La ecuación necesita como insumo la volatilidad la cual es la incógnita a develar.

5. La volatilidad implícita puede ser estimada alternativamente empleando la herramienta Solver en la planilla de cálculo Microsoft Excel®. En este caso la función a optimizar es la diferencia entre el precio de mercado con el valor teórico, planteando como restricciones la igualdad entre las valoraciones indicadas y la necesidad de que el desvío asuma valores positivos.

---

En el ejemplo la volatilidad para cada ejercicio es: (\$102; 20,1%); (\$106; 26,2%); (\$110; 30,6%) y (\$118; 43,4%).

**Cuadro No. 2: Variables involucradas en la obtención de la volatilidad implícita**

Ejercicio:	\$ 102,00	\$ 106,00	\$ 110,00	\$ 118,00
Ask Price:	\$ 3,50	\$ 2,60	\$ 1,50	\$ 0,65
Bid Price:	\$ 3,20	\$ 2,25	\$ 1,30	\$ 0,65
Call medio	\$ 3,35	\$ 2,43	\$ 1,40	\$ 0,65
d1	0,22730	0,15498	0,10528	0,02366
d2	0,13917	0,04017	-0,02859	-0,16642
Call teórico	\$ 3,35	\$ 2,43	\$ 1,40	\$ 0,65
Ajuste	0,00	0,00	0,00	0,00
$\sigma$ implícito	20,1%	26,2%	30,6%	43,4%
Vto días	70,00	70,00	70,00	70,00
$\Delta T=(vto/365)10yy$	0,02	0,02	0,02	0,02

*Fuente: elaboración propia.*

El Cuadro No. 2 resume para cada uno de los contratos de opción los precios de comprador-vendedor de la prima, el precio promedio, los coeficientes d1, d2, el valor teórico del precio de la opción de compra y su duración nominal. Todas las variables indicadas son los insumos empleados para estimar la volatilidad implícita.

### II.3. Rejillas binomiales explícitas (CRR)

Con los datos disponibles se está en condición de obtener los parámetros para la construcción de la rejilla binomial; (Cox y Ross 1976; Cox, *et al.*, 1979):

$$u = \exp^s \sqrt{t/n} \quad (4)$$

$$d = \exp^{-s} \sqrt{t/n} \quad (5)$$

$$p = \frac{r-d}{u-d} \quad (6)$$

$$Disc = e^{-r \times (t/n)} \quad (7)$$

Los coeficientes de ascenso ( $u$ ), descenso ( $d$ ) y probabilidades equivalentes ciertas ( $p$ ,  $1-p$ ) fueron estimados a partir de la volatilidad implícita correspondiente al precio de ejercicio ( $X=\$110$ ), debido a que es el contrato objeto de valoración. El factor de actualización sin riesgo por la duración del contrato ( $Disc$ ) fue estimado empleando la tasa BAIBAR.<sup>6</sup> En el Cuadro No. 3 se exponen los valores correspondientes a los parámetros aludidos.

### Cuadro No. 3: Parámetros correspondientes al proceso binomial

Parámetros	
$\sigma$	30,570%
$u$	1,0432
$d$	0,9585
$r$	1,0018
$p$	0,5106
$1-p$	0,4894
Disc	0,9823
Disc p	0,9982

Fuente: elaboración propia.

La rejilla binomial es el resultado de proyectar los movimientos de ascenso y descenso sobre el valor del subyacente por cada paso en los que se alcanza el horizonte temporal, empleando la siguiente expresión:

$$S_{jt} = [S_{jt-1} \times u; S_{jt-1} \times d] \quad (8)$$

El procedimiento de valuación de opciones puede sistematizarse en los siguientes pasos:

- a. Estimar el valor al vencimiento de la opción de compra ( $c_t$ ) aplicando la expresión ( $S$  precio del subyacente y  $X$  precio de ejercicio al vencimiento,  $t=10$ )

$$c_t = [Max(S_t - X); 0] \quad (9)$$

6. Las variables de las ecuaciones 4 ( $\sigma$ ), 5 ( $\sigma$ ) y 7 (tipo sin riesgo) se deben sincronizar con el fin de aplicar el procedimiento recursivo por paso; para ello el intervalo total de tiempo  $t$  es dividido por la cantidad de pasos del proceso,  $n$ .

**Cuadro No. 4: Rejilla binomial tradicional, 10 pasos sobre acción Tenaris TS**  
(valores 10-06-2011, fuente IAMC)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\$ 100,00	\$ 104,32	\$ 108,84	\$ 113,54	\$ 118,45	\$ 123,57	\$ 128,92	\$ 134,49	\$ 140,31	\$ 146,38	\$ 152,71
	\$ 95,85	\$ 100,00	\$ 104,32	\$ 108,84	\$ 113,54	\$ 118,45	\$ 123,57	\$ 128,92	\$ 134,49	\$ 140,31
		\$ 91,88	\$ 95,85	\$ 100,00	\$ 104,32	\$ 108,84	\$ 113,54	\$ 118,45	\$ 123,57	\$ 128,92
			\$ 88,07	\$ 91,88	\$ 95,85	\$ 100,00	\$ 104,32	\$ 108,84	\$ 113,54	\$ 118,45
				\$ 84,42	\$ 88,07	\$ 91,88	\$ 95,85	\$ 100,00	\$ 104,32	\$ 108,84
					\$ 80,92	\$ 84,42	\$ 88,07	\$ 91,88	\$ 95,85	\$ 100,00
						\$ 77,57	\$ 80,92	\$ 84,42	\$ 88,07	\$ 91,88
							\$ 74,35	\$ 77,57	\$ 80,92	\$ 84,42
								\$ 71,27	\$ 74,35	\$ 77,57
									\$ 68,32	\$ 71,27
										\$ 65,49

Fuente: elaboración propia.

- b. Calcular las probabilidades asociadas a los nodos terminales ( $n$  cantidad total de pasos,  $j$  números correspondientes a cada combinación,  $p$  probabilidad equivalente cierta de éxito,  $1-p$  su complemento)

$$Q_j = \frac{n!}{j!(n-j)!} \left[ p^j (1-p)^{n-j} \right] \quad (10)$$

- c. El valor actual del subyacente resulta de la sumatoria entre los productos de los valores terminales ajustados por su probabilidad de ocurrencia y actualizados por el factor de descuento ( $S_{t_j}$  valor que el subyacente asume en cada nodo final y  $Q_{t_j}$  probabilidad obtenida en el paso 2)

$$S_0 = \left[ \sum_{j=0}^n S_{t_j} \times Q_{t_j} \right] \times Disc \quad (11)$$

- d. El valor de la opción ( $c_0$ ) es la sumatoria de los productos entre el valor al vencimiento del derivado (Ecuación 9) y la probabilidad correspondiente a cada nodo final  $Q_{t_j}$  (Ecuación 10). Los valores



son actualizados a la tasa de interés libre de riesgo o factor de descuento (*Disc*) (Ecuación 12)

$$c_0 = \left[ \sum_{j=0}^n c_{t_j} \times Q_{t_j} \right] \times Disc \quad (12)$$

En el Cuadro No. 5 se presentan los valores terminales correspondientes al subyacente, obtenido mediante el método binomial con coeficientes de probabilidad equivalentes ciertos (Ecuación 8). Adicionalmente se exponen las probabilidades de ocurrencia para cada nodo (Ecuación 10) y el valor ajustado actualizado. La sumatoria es igual al precio del subyacente (Ecuación 11).

**Cuadro No. 5: Valuación del subyacente por el método binomial (A: probabilidades equivalente cierto; B: valor para el nodo final del subyacente; C: valor por probabilidad; D: descuento y E: descuento por valor ajustado por riesgo)**

nodos	Q(CRR) (1) A	S(ij)n B	S(ij)nxQ C=AxB	Descuento D	Spot x disc E=CxD
10	0,12036%	\$ 152,71	\$ 0,1838	0,9823	\$ 0,1805
9	1,15384%	\$ 140,31	\$ 1,6189	0,9823	\$ 1,5902
8	4,97743%	\$ 128,92	\$ 6,4168	0,9823	\$ 6,3030
7	12,72388%	\$ 118,45	\$ 15,0717	0,9823	\$ 14,8044
6	21,34537%	\$ 108,84	\$ 23,2314	0,9823	\$ 22,8194
5	24,55450%	\$ 100,00	\$ 24,5545	0,9823	\$ 24,1190
4	19,61534%	\$ 91,88	\$ 18,0229	0,9823	\$ 17,7033
3	10,74494%	\$ 84,42	\$ 9,0711	0,9823	\$ 8,9103
2	3,86261%	\$ 77,57	\$ 2,9962	0,9823	\$ 2,9430
1	0,82284%	\$ 71,27	\$ 0,5864	0,9823	\$ 0,5760
0	0,07888%	\$ 65,49	\$ 0,0517	0,9823	\$ 0,0507
				Σ	\$ 100,00

*Fuente elaboración propia.*

A continuación, en el Cuadro No. 6, se presentan los valores de las opciones de compras para cada uno de los precios de ejercicios aplicando el modelo CRR.

**Cuadro No. 6: Valor teórico de las opciones de compra con el método CRR**

Ejercicio	\$ 102,00	\$ 106,00	\$ 110,00	\$ 118,00
10	\$ 0,0610	\$ 0,0562	\$ 0,0514	\$ 0,0418
9	\$ 0,4420	\$ 0,3959	\$ 0,3497	\$ 0,2574
8	\$ 1,3398	\$ 1,1407	\$ 0,9416	\$ 0,5434
7	\$ 2,0933	\$ 1,5844	\$ 1,0754	\$ 0,0575
6	\$ 1,4591	\$ 0,6053	\$ -	\$ -
5	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
4	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
3	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
2	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
1	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
0	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
Ct (CRR)	\$ 5,30	\$ 3,72	\$ 2,38	\$ 0,88

Fuente: elaboración propia.

Por último, en el Cuadro No. 7, se presenta el valor de compra (*ask*), de venta (*bid*) y el valor teórico estimado por el método CRR. Las diferencias entre precios de mercados (*bid-ask*) y teóricos (CRR) surgen de:  $Dif Ask = call ask - C CRR$ ;  $Dif Bid = C CRR - call bid$ .

**Cuadro No. 7: Precios de compra-venta y valor teórico de la opción**

Ejercicio	\$ 102,00	\$ 106,00	\$ 110,00	\$ 118,00
Ask Price	\$ 3,50	\$ 2,60	\$ 1,50	\$ 0,65
Bid Price	\$ 3,20	\$ 2,25	\$ 1,30	\$ 0,65
Ct (CRR)	\$ 5,30	\$ 3,72	\$ 2,38	\$ 0,88
Dif Ask	\$ -1,7996	\$ -1,1154	\$ -0,8753	\$ -0,2342
Dif Bid	\$ 2,0996	\$ 1,4654	\$ 1,0753	\$ 0,2342

Fuente: elaboración propia.

El valor teórico escapa del precio de compra-venta pactado en el mercado. Esto es así debido a que el método CRR supone normalidad en el comportamiento estocástico del activo. No obstante, existe suficiente evidencia

contra el supuesto de normalidad en algunos fenómenos, específicamente en los mercados de capitales (Taleb, 2004). En ese sentido, el método de carteras réplicas binomiales no es suficiente, siendo necesario inferir los momentos a partir de la observación de los precios del mercado.

#### **II.4. Rejilla binomiales implícitas (IBT)**

El modelo supone que los parámetros  $p$ ,  $u$  y  $d$  no se mantienen constantes durante la proyección del proceso estocástico. Adicionalmente permite incorporar el tercer (asimetría) y cuarto momento (curtosis) estocástico, en la medida que estos se encuentren presentes en los precios de mercado que ofician de insumo del modelo. Esto es así por la sencilla razón de que las probabilidades de ocurrencia son inferidas a partir de los precios observados en el mercado del derivado financiero en cuestión. La valoración fundada en probabilidades implícitas es condicionada por las expectativas del mercado relacionadas con el proceso estocástico esperado para el activo subyacente. De esta forma, no supone indefectiblemente el tradicional proceso geométrico browniano (y su aproximación binomial en tiempo discreto).

Su instrumentación requiere aplicar una secuencia lógica de instancias partiendo de los precios observados en los activos financieros (Arnold *et al.*, 2004). Para la construcción del algoritmo de iteración se utilizó la función Solver de Microsoft Excel®. A continuación se detallan las etapas de cálculo: *Primero*: insumos para la construcción de la rejilla binomial implícita:

- a. Contratos de opciones con diferentes precios de ejercicio sobre el mismo subyacente: conjunto de opciones financieras negociadas con el mismo vencimiento y sobre el subyacente.
- b. Riesgo implícito: la volatilidad se estima de forma implícita empleando el modelo Black-Scholes. Se selecciona la opción que se encuentra más cercana al estado “en el dinero”.
- c. Proceso estocástico binomial CRR: se proyecta el proceso estocástico del activo subyacente utilizando parámetros  $u$ ,  $d$  y  $p$  estimados a partir de la volatilidad implícita del punto anterior. La derivación del proceso estocástico del subyacente se realiza aplicando el tradicional modelo CRR.

*Segundo:* definidas las variables de entrada se debe construir el conjunto de ecuaciones y restricciones. Esta es la base empleada para valorar todas las opciones negociadas con el mínimo error. Para ello se debe emplear un argumento iterativo de optimización. El objetivo del mismo consiste en establecer las probabilidades implícitas asociados a los precios probables del activo subyacente en los nodos finales obtenidos con el proceso CRR (punto c). La probabilidad asociada a los nodos finales se denomina  $Q_j^*$ , y ésta es obtenida con las siguientes restricciones:

**Restricción 1:** Minimizar la diferencia entre probabilidades explícitas e implícitas.

$$error = \sum_{j=0}^N \left[ Q_j - Q_j^* \right]^2 \quad (13)$$

$Q_j$  es la probabilidad del nodo final obtenida con el método CRR y  $Q_j^*$  es la probabilidad implícita, correspondiente a un precio que experimenta  $j$  movimientos ascendentes,  $n-j$  descendentes.

**Restricción 2:** Este es el resultado a obtener, el cambio de probabilidades. La restricción impuesta indica que la suma de las probabilidades implícitas debe ser igual a uno.

$$\sum_{j=0}^N Q_j^* = 1 \quad (14)$$

Las probabilidades implícitas<sup>7</sup> siempre son una magnitud positiva para todos los nodos (desde  $j$  hasta  $n$ )

**Restricción 3:** valor de mercado del subyacente igual a

$$S_0 = \left[ \sum_{j=0}^n S_{tj} \times Q_{*tj} \right] \times Disc \quad (15)$$

---

7. Es incorrecto hacer referencias a probabilidades implícitas nodales debido a que estas corresponden a los arcos del árbol binomial y no a los nodos.

---

$S_{ij}$  es el precio del activo en el paso  $n$ -ésimo (luego de  $j$  y  $n-j$  alzas y bajas). La diferencia entre el precio observado en el mercado para el subyacente, y el valor intrínseco debe ser cero ( $Spot\ implícito - Spot\ observado = 0$ ). El valor *spot* implícito se obtiene de la sumatoria de los precios finales nodales multiplicados por la probabilidad implícita de ocurrencia ( $Q_{*j}$ ) actualizados por el factor de descuento.

Restricción 4: La diferencia entre el valor de la opción teórico estimado con probabilidades implícitas para cada precio de ejercicio y el precio de compra (*ask*);  $difask = cask - cIBT$  debe ser mayor o igual a cero. Similar restricción se aplica para el precio de venta (*bid*)  $difbid = cIBT - cask$ . El precio teórico del call ( $cIBT$ ) es determinado empleando la siguiente ecuación;

$$c_0 = \left[ \sum_{j=0}^n c_{tj} \times Q_{*tj} \right] \times Disc \quad (16)$$

En el método IBT los momentos superiores del mercado, asimetría y curtosis, son capturados, debido a que la restricción 4 pretende que los precios estén en la cota que marca los valores de de compra-venta.

En el Cuadro No. 8 se presentan los resultados correspondientes a las probabilidades nodales explícitas  $Q(CRRR)$ , implícitas  $Q'(IBT)$  (el resultado del conjunto de celdas a cambiar, restricción 2) y el error (el resultado minimizar las diferencias al cuadrado entre  $Q(CRR)$  y  $Q'(IBT)$  restricción 1).

Tercero: Estimadas las probabilidades implícitas, el proceso de valuación sigue su curso tradicional conforme fue expuesto para el modelo CRR. La valuación de la opción de compra emerge del valor actual de la sumatoria de los precios terminales, ajustados por su probabilidad de ocurrencia implícita. La metodología es similar a la usada con equivalentes ciertos. A diferencia del método indicado en este caso se utilizan las probabilidades implícitas obtenidas en el segundo paso. En el Cuadro No. 9 se expone el cálculo del valor actual correspondiente al precio *spot*.

**Cuadro No. 8: Probabilidades binomiales explícitas, implícitas y término de error**

nodos	Q(CRR)	Q'(IBT)	Error
10	0,12036%	1,6020%	0,000220
9	1,15384%	0,0001%	0,000133
8	4,97743%	0,7221%	0,001811
7	12,72388%	5,9475%	0,004592
6	21,34537%	23,0847%	0,000303
5	24,55450%	41,9210%	0,030160
4	19,61534%	23,8344%	0,001780
3	10,74494%	2,8879%	0,006173
2	3,86261%	0,0001%	0,001492
1	0,82284%	0,0001%	0,000068
0	0,07888%	0,0001%	0,000001
$\Sigma$	100,00%	100,00%	4,67%

*Fuente: elaboración propia.*

**Cuadro No. 9: Valuación del subyacente con rejillas binomiales implícitas**

A probabilidades implícitas, B valores correspondientes al subyacente por el método CRR, C valores ajustados por su probabilidad de ocurrencia, D factor de actualización y E valor actual ajustado

nodos	Q(IBT) (1) A	S(ij)n B	S(ij)nxQ C=AxB	Descuento D	Spot x disc E=CxD
10	1,60203%	\$ 152,71	\$ 2,45	0,9823	\$ 2,40
9	0,00010%	\$ 140,31	\$ 0,00	0,9823	\$ 0,00
8	0,72210%	\$ 128,92	\$ 0,93	0,9823	\$ 0,91
7	5,94746%	\$ 118,45	\$ 7,04	0,9823	\$ 6,92
6	23,08471%	\$ 108,84	\$ 25,12	0,9823	\$ 24,68
5	41,92103%	\$ 100,00	\$ 41,92	0,9823	\$ 41,18
4	23,83440%	\$ 91,88	\$ 21,90	0,9823	\$ 21,51
3	2,88787%	\$ 84,42	\$ 2,44	0,9823	\$ 2,39
2	0,00010%	\$ 77,57	\$ 0,00	0,9823	\$ 0,00
1	0,00010%	\$ 71,27	\$ 0,00	0,9823	\$ 0,00
0	0,00010%	\$ 65,49	\$ 0,00	0,9823	\$ 0,00
				$\Sigma$	\$ 100,00

*Fuente: elaboración propia.*

En ambos métodos el valor inicial del subyacente y los valores finales coinciden. Las variaciones se producen en los nodos intermedios. La tabla del Cuadro No. 10 presenta el valor de la prima obtenido mediante el enfoque de probabilidades implícitas. Éste surge de la sumatoria de los valores obtenidos aplicando la Ecuación 16.

**Cuadro No. 10: Valor teórico de las opciones de compra con el método IBT**

Ejercicio	\$ 102,00	\$ 106,00	\$ 110,00	\$ 118,00
10	\$ 0,8123	\$ 0,7482	\$ 0,6842	\$ 0,5560
9	\$ 0,0000	\$ 0,0000	\$ 0,0000	\$ 0,0000
8	\$ 0,1944	\$ 0,1655	\$ 0,1366	\$ 0,0788
7	\$ 0,9785	\$ 0,7406	\$ 0,5027	\$ 0,0269
6	\$ 1,5780	\$ 0,6546	\$ -	\$ -
5	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
4	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
3	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
2	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
1	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
0	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
<b>Ejercicio</b>	<b>\$ 3,50</b>	<b>\$ 2,27</b>	<b>\$ 1,30</b>	<b>\$ 0,65</b>

*Fuente: elaboración propia.*

La tabla del Cuadro No. 11 expone los diferenciales entre el precio teórico y los precios de compra venta en el mercado. El valor teórico obtenido mediante IBT es acotado por los valores máximos y mínimos de negociación (restricción 4).

A diferencia del modelo CRR, trabajar con probabilidades implícitas limita el precio a los precios de compra-venta (*bid-ask*) capturando el tercer (asimetría) y cuarto (curtosis) momento estocástico. La no normalidad está reflejada en los precios, aunque los tradicionales modelos no contemplan dicha situación, por lo tanto, sin perjuicio de su amplia difusión y evidente simplicidad, carecen de capacidad para explicar íntegramente el precio.

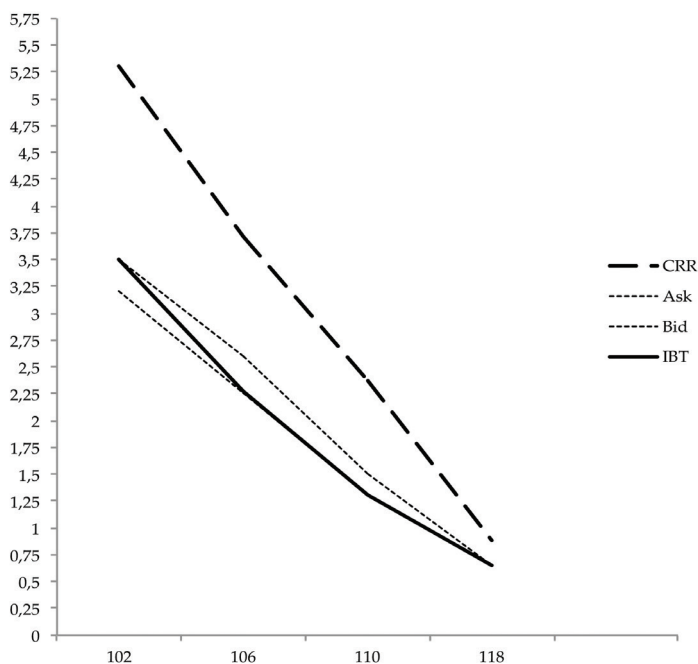
**Cuadro No. 11: Precios de compra-venta y valor teórico de la opción**

Ejercicio	\$ 102,00	\$ 106,00	\$ 110,00	\$ 118,00
Ask Price	\$ 3,50	\$ 2,60	\$ 1,50	\$ 0,65
Bid Price	\$ 3,20	\$ 2,25	\$ 1,30	\$ 0,65
Ct (IBT)	\$ 3,50	\$ 2,27	\$ 1,30	\$ 0,65
Dif Ask	\$ 0,0000	\$ 0,3320	\$ 0,2000	\$ -0,0000
Dif Bid	\$ 0,3000	\$ 0,0180	\$ -0,0000	\$ 0,0000

Fuente: elaboración propia.

De allí que a menudo se emplean ajustes *ad-hoc* (Hatella, 2005), o transformaciones sobre la función binomial de probabilidad (Rubinstein, 1998).

En el Gráfico No. 1 se ilustran los diferentes valores obtenidos mediante el tradicional método binomial con probabilidades explícitas y el uso de probabilidades implícitas.

**Gráfico No. 1: Valor teórico opción de compra CRR e IBT precio de compra-venta**

Fuente: elaboración propia.



En la ilustración se observan las diferencias de valor entre ambos métodos y cómo el valor estimado mediante IBT queda cercado por los precios de compra-venta al cual se negocia la opción de compra. La línea punteada (CRR) tiene un comportamiento lineal con una relación decreciente precio del derivado valor precio ejercicio, propio del supuesto de normalidad asumido. En cambio el método IBT resume los cuatro momentos estocásticos manifestados por los agentes mediante los precios de compra (*ask*)-venta (*bid*).

### III. Desagregando rejillas binomiales implícitas: coeficientes equivalentes ciertos no constantes

En esta sección serán comparados los valores de coeficientes equivalentes ciertos estimados con el método de árboles binomiales implícitos y los clásicos coeficientes constantes equivalentes ciertos del modelo CRR. En una rejilla CRR, las probabilidades asociadas a cada estado son estimadas empleando la siguiente ecuación:

$$P_j = \frac{n!}{j!(n-j)!} \left[ p^j (1-p)^{n-j} \right] \quad (17)$$

Continuando con el ejemplo del trabajo, la rejilla de probabilidades correspondientes a cada nodo se expone en el Cuadro No. 12.

**Cuadro No. 12: Probabilidades CRR opción de compra TSC110AGO**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	nodos
100,00%	48,94%	23,95%	11,72%	5,74%	2,81%	1,37%	0,67%	0,33%	0,16%	0,08%	0
	51,06%	49,98%	36,69%	23,94%	14,65%	8,60%	4,91%	2,75%	1,51%	0,82%	1
		26,07%	38,28%	37,47%	30,56%	22,44%	15,37%	10,03%	6,31%	3,86%	2
			13,31%	26,06%	31,88%	31,21%	26,73%	20,93%	15,37%	10,74%	3
				6,80%	16,63%	24,42%	27,88%	27,29%	24,05%	19,62%	4
					3,47%	10,19%	17,45%	22,78%	25,08%	24,55%	5
						1,77%	6,07%	11,88%	17,44%	21,35%	6
							0,90%	3,54%	7,80%	12,72%	7
								0,46%	2,03%	4,98%	8
									0,24%	1,15%	9
										0,12%	10

Fuente: elaboración propia.

En el modelo CRR los valores de los coeficientes equivalentes ciertos se mantienen constantes a lo largo de todo el intervalo. Estos se aplican directamente para la solución recursiva del problema del valor actual del subyacente (Cuadros No. 3 y No. 4), mediante la siguiente expresión

$$S_{j-1t-1} = (p \times S_{jt}^+ + 1 - p \times S_{jt}^-) \times e^{-r/t} \quad (18)$$

En el caso de la opción la resolución recursiva implica utilizar la siguiente ecuación:

$$c_{j-1t-1} = (p \times c_{jt}^+ + 1 - p \times c_{jt}^-) \times e^{-r/t} \quad (19)$$

Tomando como ejemplo el caso del contrato con precio de ejercicio de \$110 la rejilla binomial CRR queda planteada de la forma expresada en el Cuadro No. 13.

**Cuadro No. 13: Método de valoración CRR opción de compra TSC110AGO**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	nodos
\$ 2,38	\$ 3,61	\$ 5,37	\$ 7,79	\$ 10,98	\$ 15,00	\$ 19,77	\$ 25,08	\$ 30,70	\$ 36,57	\$ 42,71	0
	\$ 1,10	\$ 1,79	\$ 2,86	\$ 4,48	\$ 6,83	\$ 10,08	\$ 14,30	\$ 19,31	\$ 24,69	\$ 30,31	1
		\$ 0,38	\$ 0,68	\$ 1,18	\$ 2,04	\$ 3,46	\$ 5,72	\$ 9,12	\$ 13,77	\$ 18,92	2
			\$ 0,08	\$ 0,15	\$ 0,29	\$ 0,57	\$ 1,12	\$ 2,20	\$ 4,31	\$ 8,45	3
				\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	4
					\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	5
						\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	6
							\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	7
								\$ -	\$ -	\$ -	8
									\$ -	\$ -	9
										\$ -	10

Fuente: elaboración propia.

Las probabilidades derivadas de rejillas binomiales implícitas (IBT) son resueltas utilizando el procedimiento recursivo, Rubinstein (1998), que será sintetizado a continuación:

Primero: El proceso comienza en los últimos nodos de la rejilla estimando las probabilidades con la siguiente expresión,

$$Q = \frac{Q'_j}{\frac{n!}{j!(n-j)!}} \quad (20)$$

Definido  $S$  como el valor del subyacente, al considerar dos nodos adyacentes se tiene  $(Q_t^+ S_t^+; Q_t^- S_t^-)$ . Éstas son probabilidades condicionadas por el nodo precedente  $(Q_{t-1}^+; S_{t-1})$

Segundo: La probabilidad de la rama asociada al nodo precedente  $(Q_{t-1})$  es igual a la suma de las ramas de nodos adyacentes posteriores  $Q_{t-1} = Q_t^+ + Q_t^-$ . Es decir el nodo precedente resume los movimientos ascendentes y descendentes del subyacente con probabilidades  $(Q_t^+ S_t^+; Q_t^- S_t^-)$ .

Tercero: Aplicando las leyes de las probabilidades condicionales los coeficientes equivalentes son

$$p = \frac{Q_t^+}{Q_{t-1}} \quad (21)$$

$$1-p = \frac{Q_t^-}{Q_{t-1}} \quad (22)$$

Cuarto:  $S_{t-1}$  representa la expectativa neutral al riesgo de las ramas adyacentes del nodo posterior  $S_t^+$  y  $S_t^-$  con las probabilidades que arrojan los coeficientes equivalentes ciertos  $(p_{jt}; 1-p_{jt})$ , actualizada al tipo sin riesgo correspondiente al intervalo de tiempo. A continuación se exponen las ecuaciones correspondientes al valor actual del subyacente y de la opción,

$$S_{j-1t-1} = \left[ p_{jt} \times S_{jt}^+ + (1-p_{jt}) \times S_{jt}^- \right] \times e^{-r/t} \quad (23)$$

$$c_{j-1t-1} = \left[ p_{jt} \times c_{jt}^+ + (1-p_{jt}) \times c_{jt}^- \right] \times e^{-r/t} \quad (24)$$

Los resultados correspondientes a los pasos primero (definición de la probabilidad en los nodos del último periodo) y segundo (probabilidades determinadas en el nodo) son expuestos en la rejilla representada en el Cuadro No. 14.

**Cuadro No. 14: Probabilidades IBT opción de compra TSC110AGO**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	nodos
100,00%	48,45%	22,10%	9,13%	3,29%	0,97%	0,21%	0,02%	0,00%	0,00%	0,00%	0
	51,55%	26,35%	12,97%	5,84%	2,32%	0,76%	0,19%	0,02%	0,00%	0,00%	1
		25,21%	13,37%	7,14%	3,52%	1,55%	0,58%	0,16%	0,02%	0,00%	2
			11,83%	6,24%	3,62%	1,97%	0,97%	0,42%	0,14%	0,02%	3
				5,59%	2,62%	1,65%	0,99%	0,56%	0,28%	0,11%	4
					2,97%	0,97%	0,66%	0,44%	0,28%	0,17%	5
						2,01%	0,31%	0,23%	0,16%	0,11%	6
							1,70%	0,08%	0,07%	0,05%	7
								1,62%	0,02%	0,02%	8
									1,60%	0,00%	9
										1,60%	10

Fuente: elaboración propia.

**Cuadro No. 15: Coeficientes IBT para cada nodo recursivo opción de compra TSC110AGO**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	nodos
0,48445	0,45616	0,41302	0,36067	0,29607	0,21537	0,11530	0,00505	0,90000	0,90909	0
0,51555	0,54384	0,58698	0,63933	0,70393	0,78463	0,88470	0,99495	0,10000	0,09091	0
	0,51104	0,49235	0,44986	0,39712	0,33001	0,24284	0,12966	0,00051	0,81818	1
	0,48896	0,50765	0,55014	0,60288	0,66999	0,75716	0,87034	0,99949	0,18182	1
		0,53058	0,53356	0,49298	0,44132	0,37295	0,27913	0,14891	0,00009	2
		0,46942	0,46644	0,50702	0,55868	0,62705	0,72087	0,85109	0,99991	2
			0,52721	0,57997	0,54321	0,49533	0,42876	0,32956	0,17494	3
			0,47279	0,42003	0,45679	0,50467	0,57124	0,67044	0,82506	3
				0,46838	0,63073	0,60014	0,56067	0,50321	0,40556	4
				0,53162	0,36927	0,39986	0,43933	0,49679	0,59444	4
					0,32535	0,68297	0,65939	0,63401	0,60212	5
					0,67465	0,31703	0,34061	0,36599	0,39788	5
						0,15288	0,73378	0,70853	0,68924	6
						0,84712	0,26622	0,29147	0,31076	6
							0,04805	0,80339	0,75542	7
							0,95195	0,19661	0,24458	7
								0,00992	0,99938	8
								0,99008	0,00062	8
									0,00001	9
									0,99999	9

Fuente: elaboración propia.

Luego es menester cumplir con el tercer paso para la estimación de los coeficientes (coeficientes  $p_{jt}$ ;  $1-p_{jt}$ ). A diferencia del modelo CRR estos tienen un comportamiento variable. Los mismos son expuestos en el cuadro No. 15.

Al ser el método recursivo, los nodos correspondientes al periodo  $t$  ( $t=10$ ) son utilizados para obtener el valor en  $t-1$  ( $t=9$ ). En cada caso hay 10 pares ya que por lo expuesto en el paso 2, el valor del nodo precedente es el resumen de los valores de los nodos adyacentes posteriores. A diferencia del método CRR, los coeficientes no son constantes y deben estimarse por nodo, no obstante los valores finales e inicial son idénticos entre ambos métodos. El valor expandido de la rejilla binomial implícita para el subyacente se presenta en el Cuadro No. 16.

**Cuadro No. 16: Valor actual del subyacente IBT opción de compra**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	nodos
\$ 100	\$ 95,41	\$ 91,12	\$ 86,96	\$ 82,89	\$ 78,90	\$ 74,98	\$ 71,18	\$ 73,62	\$ 76,86	\$ 65,49	0
	\$ 104,13	\$ 99,98	\$ 96,18	\$ 92,60	\$ 89,26	\$ 86,18	\$ 83,38	\$ 80,78	\$ 78,67	\$ 71,27	1
		\$ 108,46	\$ 103,94	\$ 99,97	\$ 96,24	\$ 92,79	\$ 89,64	\$ 86,85	\$ 91,72	\$ 77,57	2
			\$ 113,18	\$ 108,00	\$ 103,85	\$ 99,95	\$ 96,35	\$ 93,12	\$ 98,40	\$ 84,42	3
				\$ 118,66	\$ 112,19	\$ 107,82	\$ 103,70	\$ 99,88	\$ 105,06	\$ 91,88	4
					\$ 125,29	\$ 116,51	\$ 111,91	\$ 107,51	\$ 112,46	\$ 100,00	5
						\$ 132,59	\$ 121,02	\$ 116,26	\$ 121,49	\$ 108,84	6
							\$ 139,51	\$ 125,50	\$ 131,47	\$ 118,45	7
								\$ 146,00	\$ 140,07	\$ 128,92	8
									\$ 152,43	\$ 140,31	9
										\$ 152,71	10

*Fuente: elaboración propia.*

Finalmente el paso cuatro, determinación del valor intrínseco de la opción por el método IBT, se expone en el Cuadro No. 17. Éste es el mismo que aquel obtenido de manera directa para el contrato de opción de compra con precio de ejercicio \$110 (Cuadro No. 10).

**Cuadro No. 17: Valor actual de la opción IBT  
opción de compra TSC110AGO**

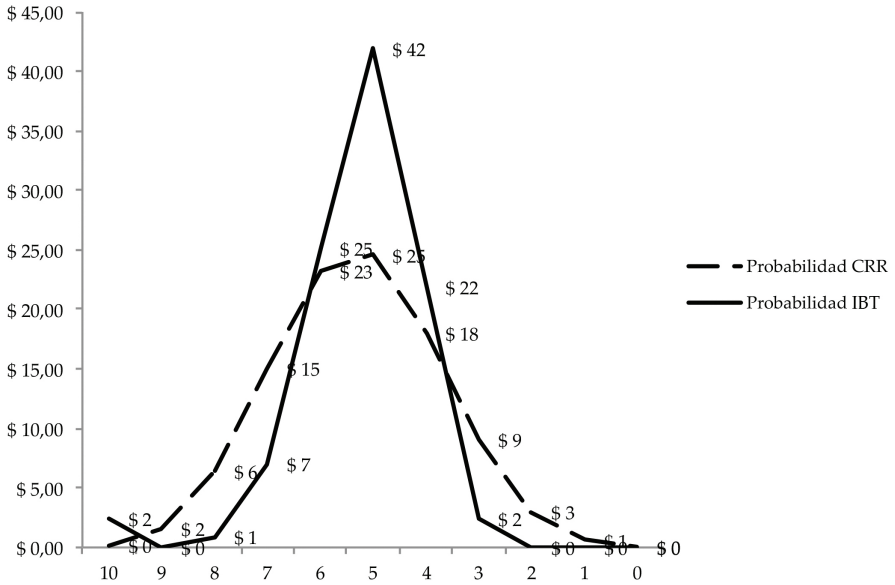
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	nodos
\$ 1,300	\$ 0,36	\$ 0,16	\$ 0,05	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	0
	\$ 2,19	\$ 0,53	\$ 0,25	\$ 0,07	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	1
		\$ 3,93	\$ 0,81	\$ 0,39	\$ 0,12	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	2
			\$ 7,47	\$ 1,29	\$ 0,66	\$ 0,21	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	3
				\$ 14,39	\$ 2,16	\$ 1,19	\$ 0,42	\$ -	\$ -	\$ -	4
					\$ 25,21	\$ 3,83	\$ 2,35	\$ 0,96	\$ -	\$ -	5
						\$ 35,58	\$ 7,03	\$ 5,05	\$ 2,62	\$ -	6
							\$ 40,81	\$ 12,52	\$ 10,99	\$ 8,45	7
								\$ 42,32	\$ 18,89	\$ 18,92	8
									\$ 42,63	\$ 30,31	9
										\$ 42,71	10

*Fuente: elaboración propia.*

#### **IV. Momentos superiores y las distribuciones de probabilidades implícitas**

Trabajar con rejillas binomiales implícitas permite incorporar los momentos superiores no capturados por las rejillas binomiales tradicionales. Las últimas suponen simetría en la distribución de probabilidad, además los coeficientes equivalentes ciertos permanecen constantes en los diferentes pasos en que se desenvuelve la vida del derivado. En cambio, trabajar con probabilidades implícitas presupone inferir, a partir de la información disponible en el mercado en el momento de valuación, las expectativas de valor y probabilidades asociadas abandonando el supuesto de normalidad. Estas ideas quedan corroboradas en el Gráfico No. 2. En éste se presenta con línea punteada la distribución binomial explícita (CRR) y con línea continua la implícita (IBT).

La distribución de probabilidad de los valores teóricos correspondientes al contrato de opción de compra con precio de ejercicio \$100 para el modelo CRR sigue la tendencia de simetría y forma mesocúrtica. A diferencia de este el modelo IBT captura el tercer y cuarto momento, leve asimetría positiva y leptocurtosis, de la distribución de probabilidad inferida de los precios de mercado.

**Gráfico No. 2: VA Subyacente Probabilidades CRR-IBT**

*Fuente: elaboración propia.*

## V. El uso de las rejillas binomiales en opciones reales

Las rejillas binomiales pueden ser aplicadas al campo de valoración de opciones reales posibilitando la aplicación de la lógica binomial e incorporando momentos de orden superior a partir de las expectativas de mercado. Esto es posible en la medida que el subyacente seleccionado tenga correlación perfecta con los ingresos del proyecto o activo real objeto de evaluación (Trigeorgis, 1997; Wang y Halal, 2010).

A partir de los datos anteriores se analizará el caso de la licencia de un proyecto extractivo de materias primas en bruto a ser procesadas por la firma analizada en el ejemplo. La fecha de valuación es al 10 de junio del 2011 y se analiza la firma de un convenio en donde se presentan las siguientes alternativas: (a) el inicio de las actividades extractivas en los próximos 30 días; (b) pagar una licencia de \$300.000 para comenzar las actividades extractivas dentro de 4 meses en la medida que la evolución del precio del subyacente sea satisfactoria. Es el típico caso de una opción de diferir el proyecto asimilable a una opción financiera de compra.

A los efectos de simplificar el ejemplo se supone que los ingresos se encuentran perfectamente correlacionados con la acción de la firma y la tonelada bruta del material se pacta al precio de la acción, al momento de la firma del contrato el precio asciende a \$100. Los costos operativos por tonelada hoy asciende a \$102 y dentro de cuatro meses pueden moverse en el siguiente rango: \$102; \$106; \$110 y \$118. La cantidad pactada de material (a realizar en 30 días o diferir la decisión a 4 meses a la espera de mayor información) es de 200.000 toneladas de materia prima bruta. La función de beneficio es

$$b_t = \left\{ \left[ (p_t - c_t) \times u \right] \times e^{-rxt} \right\} - l \quad (25)$$

En este caso  $p_t$  y  $c_t$  representan precio y costos por tonelada en el momento  $t$ ,  $u$  cantidad de toneladas,  $e^{-rxt}$  factor de actualización y  $l$  el costo de la licencia. El criterio del valor actual neto tradicional indica la no suscripción del contrato y comienzo de las tareas extractivas del proyecto cualquiera sea el escenario, debido a que arroja una pérdida de \$400.000. Esto es así debido a que no se considera la flexibilidad estratégica de diferir. De hecho, solamente se considera el precio de venta *spot* (\$100) y los costos actuales (\$102). En un entorno de opciones reales son incorporados los posibles precios a fecha de ejercicio, en este caso:

$$v = \text{Max} \left\{ \left[ (p_t - c_t) \times u \right] \times e^{-rxt} - l; 0 \right\} \quad (26)$$

La flexibilidad estratégica de diferir tiene un mayor valor expandido en comparación al inicio de las tareas extractivas en forma inmediata. La estrategia indicada es ejercer el diferimiento al cuarto mes a la espera de nueva información que revele el precio de ingreso (Cuadro No. 18). El modelo CRR indica que el ejercicio se produce en todos los casos a excepción de que el costo de extracción sea de \$118. Para el modelo IBT en dos de los cuatro escenarios se presenta el ejercicio (costos de extracción \$102 y \$106) en el resto de los casos no es conveniente el ejercicio. Nuevamente la diferencia de resultados obedece a que en el caso de las rejillas implícitas los momentos de orden superior asociados a probabilidades son capturados e incorporados en el proceso de valuación.



**Cuadro No. 18: Opciones reales:  
Valuación de la licencia VAN-CRR-IBT**

Derecho a comprar firma: Pasados 4 meses, luego ejercicio. Flexibilidad de diferir (europea)				
<b>Producción (unidades)</b>	<b>200.000,00</b>			
Costo de extracción(X)	\$ 102,00	\$ 106,00	\$ 110,00	\$ 118,00
Costo de extracción total (X)	\$ 20.400.000,00	\$ 21.200.000,00	\$ 22.000.000,00	\$ 23.600.000,00
<b>Costo de la licencia</b>	<b>\$ 300.000,00</b>			
<b>Precio de venta Spot</b>	<b>\$ 100,00</b>			
VAN sin flexibilidad	\$ -400.000,00			
<b>Inversión-Abandono</b>	<b>NO INVERSIÓN</b>			
Diferir CRR (Ganancia (S-X))*producción	\$ 1.059.920,97	\$ 743.074,27	\$ 475.054,12	\$ 176.830,08
<b>VAN con flexibilidad CRR</b>	\$ 759.920,97	\$ 443.074,27	\$ 175.054,12	\$ -123.169,92
<b>Ejercicio (Ganancia-Licencia)</b>	<b>EJERCICIO</b>	<b>EJERCICIO</b>	<b>EJERCICIO</b>	<b>NO EJERCICIO</b>
Diferir IBT (Ganancia (S-X))*producción	\$ 700.000,00	\$ 453.597,40	\$ 260.000,00	\$ 130.000,00
<b>VAN con flexibilidad IBT</b>	\$ 400.000,00	\$ 153.597,40	\$ -40.000,00	\$ -170.000,00
<b>Ejercicio (Ganancia-Licencia)</b>	<b>EJERCICIO</b>	<b>EJERCICIO</b>	<b>NO EJERCICIO</b>	<b>NO EJERCICIO</b>

*Fuente: elaboración propia.*

## VI. Conclusiones

El comportamiento normal en los precios de activos financieros, a menudo es un supuesto simplificador y bastante restrictivo. El modelo binomial (CRR) se caracteriza por responder a un esquema de equilibrio, sencillez y elasticidad para modelar un sinnúmero de complejas situaciones (opciones financieras exóticas y opciones reales). A cambio de ello supone normalidad en el comportamiento del subyacente y de las probabilidades correspondientes a los arcos de la rejilla binomial. Por lo general la distribución de probabilidad de los posibles valores de activos presenta sesgos y asimetrías. Existe la posibilidad de incorporar al sencillo modelo binomial los momentos estocásticos de orden superior. Para ello es menester inferir la distribución de probabilidad a partir de los precios y expectativas de los agentes. Esto es posible empleando rejillas binomiales implícitas (IBT). El éxito del método dependerá del grado de precisión con que se determina el valor del subyacente en el horizonte temporal y de la disponibilidad de

información (precios) para inferir las probabilidades implícitas. Las expectativas de los agentes juegan un rol fundamental en la composición del precio, por lo tanto estas no pueden sustraerse del proceso de estimación de valor.

---

---

## Referencias

- Arnold; T y Crack, T. (2003). *Option Pricing in the Real World: A Generalized Binomial Model with Applications to Real Options*. Nueva York: Social Science Electronic Publishing, Inc. (SSRN). Fecha de consulta 18-11-2010 Disponible en <http://ssrn.com/abstrac=240554>.
- Arnold, T y Crack, T. (2004). *Real Option Valuation Using NPV*. Nueva York: Social Science Electronic Publishing, Inc. (SSRN). Fecha de consulta 18-11-2010 disponible Disponible en <http://ssrn.com/abstrac=105741>.
- Arnold, T., Crack, T y Schwartz, A. (2004). *Implied Binomial Trees in Excel without VBA*. Nueva York: Social Science Electronic Publishing, Inc. (SSRN). Fecha de consulta 14-2-2011 Disponible en <http://ssrn.com/abstrac=541744>.
- Black, F y Scholes, M. (1972). The Valuation of Options Contracts and a Test of Market Efficiency. *Journal of Finance*, 27(2), 399-418.
- Black, F y Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-659.
- Borison, A. (2005). Real Options Analysis: Where are the Emperor's Clothes? *Journal of Applied Corporate Finance*, 17(2), 17-31.
- Brandao, L., Dyer, J y Hahn, W. (2005). Using Binomial Decision Trees to Solve Real Options Valuations Problems. *Journal of Decision Analysis*, 2(2), 69-88.
- Breeden, D y Litzenberger, R. (1978). Prices State-Contingent Claims Implict in Options Price. *Journal of Business*, 51(4), 621-651.
- Copeland, T., Weston, F y Shastri, K. (2005). *Financial Theory and Corporate Policy* (4 ed.). Estados Unidos: Pearson Addison Wesley.
- Cox, J., Ross, S y Rubinstein, M. (Septiembre de 1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, 7(3), 229-263.
- Cox, J y Ross, S. (1976). The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics*, 3, 145-166.
- Hull, J. (2005). *Futures, Options and other Derivatives* (5 ed.). New Jersey: Prentice Hall.
- Merton, R. (Primavera de 1973). Theory of Rational Options Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141-183.
- Merton, R. (1976). Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2), 125-144.
- Rincon, L. (2008). *Introducción a los procesos estocásticos*. UNAM Facultad de Ciencias, Matemáticas. México: UNAM.
- Ross, S. (1976). Options and Efficiency. *Quarterly Journal of Economics*, 90(1), 75-89.
- Rubinstein, M. (3 de 1994). Implied Binomial Trees. *Journal of Finance*, 49(3), 771-818.
- Rubinstein, M. (1998). Edgeworth Binomial Trees. *Journal of Derivatives*, 5(3), 20-27.
- Rubinstein, M. (2000). *On the Relation Between Binomial and Trinomial Option Pricing Model*. Berkeley, Research Program in Finance-292. California: UC Berkeley.
- Shimko, D. (1993). Bounds on Probability. *Risk Magazine*, 6(4), 33-37.
- Smith, J. (2005). Alternative Approach for Solving Real Options Problems. *Decision Analysis*, 2(2), 89-102.
-

- Taleb, N. (2004). *Foiled by Randomness: The Hidden Role of Chance in Life and Markets*. New York: Random House.
- Taleb, N. (2007). *The Black Swam*. New York: Random House.
- Trigeorgis, L. (1997). *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocations* (2 ed.). Cambridge: MIT Press.
- Wang, A-Halal, W. (2010). Comparison of Real Asset Valuation Models: A Literature Review. *International Journal of Business and Management*, 5(5), 14-24.
-