CMA CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN METODOS CUANTITATIVOS APLICADOS A LA ECONOMÍA Y LA GESTIÓN
IADCOM - UBA

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

LATINDEX
http://www.latindex.org/latindex/ficha?folio=2751

http://www.economicas.uba.ar/institutos_y_centros/revista-de-investigacion-en-modelos-financieros/

COBERTURA DE RIESGO DE MERCADO PARA PYMES MEDIANTE EL USO DE UNA OPCIÓN EXÓTICA SOBRE EMPRESAS LÍDERES

Javier GARCÍA FRONTI y Julieta Romina SANCHEZ

Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión (CMA), Instituto de Investigaciones en Administración, Contabilidad y Métodos Cuantitativos para la Gestión (IADCOM), Universidad de Buenos Aires, Córdoba 2122 - 1120AAQ - Ciudad Autónoma de Buenos Aires, República Argentina.
julietarsanchez@economicas.uba.ar- javier.garciafronti@economicas.uba.ar

Abstract

Recibido: 10/2015

Aceptado: 02/2016

Palabras clave

Opciones exóticas
Riesgo de quiebra
Cobertura

En el mercado automotor, las ganancias de las pymes autopartistas dependen de la rentabilidad del negocio de la marca vinculada a aquellas, la cual se explica en parte por su evolución en la bolsa. Esta dependencia genera un problema de liquidez cuando la marca de automotores entra en un período de producción baja, pues la pyme recibirá menos órdenes de compra, con las consecuentes y múltiples pérdidas que esto implica. En un caso extremo, esto podría llevarla a la quiebra. Por lo anterior, sería importante contar con alguna cobertura para estas contingencias en el mercado. La contingencia en cuestión es que la acción de la empresa automotriz alcance un valor mínimo, provocando un problema financiero a la autopartista.

Este trabajo presenta el desarrollo matemático de un modelo estocástico que permite obtener el valor de una prima de riesgo a pagar para estar cubierto frente a la contingencia presentada. Se modeliza una opción de compra exótica, denominada “Opción de barrera”, cuya principal característica es que paga si dicha acción de la marca toca, antes del vencimiento de la acción, un valor crítico predeterminado. Se logra hallar una fórmula con parámetros conocidos que describe la prima que deberían pagar dichas autopartistas para estar cubierto ante períodos en los que se vean gravemente afectadas sus ganancias.

Copyright: Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires.

ISSN: 2250-6861

HEDGE FOR AUTOMOTIVE SMEs USING AN EXOTIC OPTION ON BUSINESS LEADERS

Javier GARCÍA FRONTI y Julieta Romina SANCHEZ

Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión (CMA), Instituto de Investigaciones en Administración, Contabilidad y Métodos Cuantitativos para la Gestión (IADCOM), Universidad de Buenos Aires, Córdoba 2122 - 1120AAQ - Ciudad Autónoma de Buenos Aires, República Argentina.
julietarsanchez@economicas.uba.ar- javier.garciafronti@economicas.uba.ar

ABSTRACT

Recibido: 10/2015

Aceptado: 02/2016

Key words

Exotic options
Bankruptcy risk
Hedge

In the automotive market, the profits of auto parts SMEs depend on profitability of the main brands. This financial dependence generates a liquidity problem when automotive firms enter a period of low production in an extreme case, this could bring to bankruptcy. Therefore, it would be important to have some coverage for these contingencies in the market. The contingency in question is that fluctuation in automaker´s stock price can impact a business (especially SMEs).

This paper uses a stochastic model to calculate the premium that the SME must pay for hedge against these losses. Mathematically, it calculates the probability at time cero of automaker´s stock price hitting a specific barrier before the option expires. We could arrive at a formula with known parameters which describes the premium auto parts should pay to be covered for periods in which their profits are seriously affected.

Copyright: Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires.

ISSN: 2250-6861

1. INTRODUCCIÓN

En el mercado automotor, las ganancias de las pymes autopartistas dependen del volumen de negocio de la marca en cuestión. Es decir, la rentabilidad de una empresa que produzca partes de autos, puede ser explicada (en parte) por su evolución en la bolsa. Esta dependencia genera un problema de liquidez cuando la marca de automotores entra en un período de producción baja, pues la pyme recibirá menos órdenes de compra, con las consecuentes y múltiples pérdidas que esto implica. Por lo anterior, sería importante contar con alguna cobertura para estas contingencias en el mercado. La contingencia en cuestión es que la acción de la empresa automotriz alcance un valor mínimo, provocando un problema financiero a la autopartista. En un caso extremo, esto podría culminar en una gran reducción del personal o, peor aún, la quiebra de dicha pyme.

Es importante destacar que esta cobertura no sólo puede ser tomada por la empresa autopartista en cuestión, sino también puede ser puesta en práctica como una política pública. Desde este punto de vista, la compra de este seguro le serviría al gobierno para financiar a las empresas autopartistas cuando las ventas del mercado automotor bajen y se vea en peligro, por ejemplo, el empleo de gran cantidad de trabajadores. De esta forma, se evitaría recurrir a otras medidas de financiamiento público, como lo es la suba de impuestos. Actualmente, existen diversos casos en Argentina que cuentan con este problema. En particular, las empresas que se conocieron mediáticamente por sufrir esta contingencia son: Visteon Corporation, Gestamp y Lear. Esto demuestra que el tema en cuestión es realmente relevante, dado que es posible aplicarlo a la economía real.

Es así que la aplicación de este modelo estocástico podría solucionar grandes problemas que afectan no sólo a países en desarrollo de Latino América sino a muchos países en todo el mundo. La quiebra de empresas autopartistas se debe principalmente a la necesidad de fondeo para el desarrollo efectivo de sus principales actividades. En términos generales, la principal causa de desaparición de estas pequeñas y medianas empresas se debe a que operan en un mercado muy competitivo a nivel mundial y no cuentan con la posibilidad de ganar nuevos negocios importantes. Por ende, esta situación conlleva a no poder sostener las instalaciones y operar a menos de su capacidad total. Luego de la reducción de gastos y personal, si dicha situación se sostiene en el tiempo, la única alternativa para la autopartista es quedar fuera del mercado automotor.

Nos proponemos mostrar el desarrollo matemático de un modelo estocástico, cuya resolución implique la obtención de la prima de riesgo a pagar por parte de la empresa autopartista para estar cubierto ante esta posible contingencia. Para ello, es necesario modelizar una opción de compra exótica denominada “Opción de barrera” (*Barrier Option*). La principal característica de este instrumento financiero es que paga un peso si la acción de Renault toca, antes del vencimiento, un valor crítico predeterminado.

Para lograr el objetivo este trabajo se divide en tres secciones. En la primera se explica la importancia del uso de modelos estocásticos en el campo financiero-actuarial y se definen una serie de conceptos previos necesarios para el desarrollo del modelo. En la segunda sección se desarrolla el modelo que permite calcular el valor esperado de una opción exótica de barrera que paga cuando la acción subyacente cruza un valor mínimo.

2. CONCEPTOS PREVIOS

Los modelos estocásticos permiten aplicar la teoría probabilística y matemática al campo financiero-actuarial, ya que integran la dimensión temporal al análisis de variables aleatorias. Precisamente, como la mayor parte de los riesgos financieros-actuariales implican situaciones que se desarrollan a lo largo del tiempo, estos modelos basados en procesos estocásticos resultan ser los más adecuados.

Un proceso estocástico $\{X(t)\}$ es un conjunto de variables aleatorias definidas en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ donde Ω es el espacio muestral, $\mathcal{F}_t$ la estructura de información en el momento t y P la medida de probabilidad. El espacio muestral hace referencia al conjunto de posibles resultados de un experimento, la estructura de información al momento t es el conjunto de eventos ciertos y observables al momento t y, por último, la medida de probabilidad representa la frecuencia relativa del evento observado cuando el experimento se repite infinitamente, es decir, le asigna diferentes probabilidades a los eventos. Esta medida de probabilidad cumple ciertas características como, por ejemplo, que $P(\Phi) = 0 \; y \; P(\Omega) = 1$

Los procesos estocásticos pueden ser continuos o discretos en sus variables o en el tiempo. Por un lado, un proceso es estocástico en tiempo discreto cuando el tiempo pertenece a un conjunto numerable de reales. Si esto no se cumple, el proceso se define como un proceso estocástico en tiempo continuo. Por otro lado, un proceso estocástico puede estar definido mediante variables discretas o continuas, independientemente de cómo se defina el tiempo. Es decir, pueden existir procesos estocásticos de tiempo continuo y variables discretas, y viceversa. Estos procesos son los más indicados para formalizar la evolución de un sistema dinámico cuando dicha evolución no puede ser prevista con certidumbre a partir del estado inicial del sistema y una ecuación de evolución. En el marco de la modelización financiero-actuarial, son muy utilizados para poder determinar, por ejemplo, el precio de diversos derivados financieros, cómo mitigar los riesgos de una cartera de inversión, etcétera.

En particular, este trabajo valúa el precio de un derivado financiero exótico: una "Opción de Barrera". Como ya se ha mencionado anteriormente, la principal característica de esta opción de compra es que paga un peso si la acción en cuestión toca, antes del vencimiento, un valor crítico predeterminado y, dado el enfoque y la aplicación a la economía real que se le da al modelo estocástico elegido, se va a trabajar con una opción de barrera inferior que denominaremos barrera "L".

2.1 Movimiento Browniano

El movimiento browniano $W_{\mu,\sigma}(t)$ es un proceso estocástico cuyos caminos son continuos. Es decir, se mueve de forma continua en el tiempo y sin saltos. Dichos caminos no son diferenciables en ningún punto, lo cual es así ya que todo el tiempo el movimiento browniano da giros bruscos. Cualquier combinación lineal de un proceso browniano es un movimiento browniano.

Otra de las principales características de este proceso estocástico es que posee incrementos independientes. Esta propiedad es esencial en el campo financiero ya que representa muy bien lo que ocurre en las bolsas bursátiles; los incrementos en los precios de los distintos activos financieros no están correlacionados unos con otros. Además, dichos incrementos poseen una distribución normal con media cero y varianza igual a la raíz de la variación del tiempo. Relacionado con esta última característica mencionada, otra propiedad que posee el movimiento browniano es que el valor futuro del proceso depende sólo del valor actual y no de sus valores pasados.

El movimiento browniano estándar se caracteriza por tener una tasa de retorno esperado igual a cero y volatilidad igual a uno. En el presente trabajo, representaremos la tasa de retorno esperado con la letra μ y la volatilidad con la letra σ. Es importante destacar que, el hecho de que sea un proceso sin tendencia implica que, a pesar de tener riesgo, no se espera ningún retorno, lo cual no refleja la realidad del mercado financiero.

En cambio el movimiento browniano geométrico, o también llamado movimiento browniano generalizado, se caracteriza por poseer una esperanza igual a $\mu * t$ y varianza igual a $\sigma^2 * t$. Una de las mayores desventajas de este proceso es que, por un lado, $W_{\mu,\sigma}(t)$ al distribuirse como una normal puede tomar valores negativos, lo cual no puede suceder cuando se habla de precios de mercado.

2.2 Martingala

Un proceso Martingala es un proceso estocástico sin tendencia que se define en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$, donde Ω es el espacio muestral, $\mathcal{F}_t$ la estructura de información en el momento t y P la medida de probabilidad. Es decir, el proceso estocástico continuo {M(t)} es Martingala si:

$$E\{M(t)\} < \infty \text{ con } t \geq 0 \tag{1}$$

$$E\left\{\frac{M(s)}{M(t)} | \mathcal{F}_t\right\} = 1 \text{ para todo } s<t, \text{ si } M(t)>0. \tag{2}$$

Es decir, dada la información al momento s no se puede predecir el valor de M(t). Es más, una de las principales características de los procesos martingalas es que su esperanza es constante en el tiempo. Es decir, para todo t, E{M(t)}=M(0).

Las siguientes expresiones son equivalentes a la ecuación (2):

$$E\{M(s) - M(t) | \mathcal{F}_t\} = 0 \tag{3}$$

y

$$E\{M(s) | \mathcal{F}_t\} = M(t) \tag{4}$$

Por ende, las tres ecuaciones definen a {M(t)} como un proceso Martingala. En particular, si tenemos un movimiento browniano geométrico {S(t)}, este proceso es martingala si y sólo si cumple con la ecuación (2). Es decir, siendo S(t)>0 y s<t,

$$E\left\{\frac{S(s)}{S(t)} | S(t)\right\} = E\left\{\frac{S(s)}{S(t)}\right\} = E\left\{\frac{S(0)e^{\mu s + \sigma W(s)}}{S(0)e^{\mu t + \sigma W(t)}}\right\} = E\left\{\frac{e^{W_{\mu,\sigma}(s)}}{e^{W_{\mu,\sigma}(t)}}\right\}$$
$$= \frac{M_{W_{\mu,\sigma}}(1)}{M_{W_{\mu,\sigma}}(1)} = \frac{e^{\mu s + \frac{1}{2}\sigma^2 s}}{e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t}} = e^{\mu(s-t) + \frac{1}{2}\sigma^2 (s-t)} = e^{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)(s-t)} \tag{5}$$

Entonces, para que {S(t)} sea Martingala $\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 = 0$. Es decir, un Movimiento Browniano es Martingala si y sólo si su *drift*=0. Los procesos martingala son de gran utilidad en el campo financiero ya que el hecho de ser un proceso sin tendencia implica que no se le exige ningún rendimiento al activo y, por ende, deja de ser necesario conocer la tasa libre de riesgo del mercado, lo cual es un dato muy difícil de conseguir en la práctica.

3. CÁLCULO DE LA PRIMA COMO EL VALOR ESPERADO UNA OPCIÓN EXÓTICA "BARRERA"

Tomando a los precios de una acción como indicador de bienestar económico-financiero de esta empresa líder, se asume que una baja en el precio de la misma implica necesariamente una baja en las ventas de dicha empresa y, por ende, un impacto negativo en las ganancias de las empresas autopartistas dependientes de la misma.

Modelizamos el precio de la acción como un Movimiento Browniano Geométrico con *drift*:

$$S(t) = S(0)e^{\mu t+\sigma W(t)} \tag{6}$$

Donde $\mu > 0$ y W(t) es un Movimiento Browniano Estándar.

Definimos el Stopping Time τ_L:

$$\tau_L = \inf\{t; S(t) \leq L\} \tag{7}$$

τ_L es una Variable Aleatoria que indica la primera vez en el tiempo que el Movimiento Browniano geométrico con *drift* toca la barrera L.

Buscamos la Transformada de Laplace para entender cómo se comporta τ_L.

Dado un valor real fijo $z \geq 0$, definimos $\{Z(t)\}$

$$Z(t) = e^{-zt}[S(t)]^{\xi} \tag{8}$$

$$Z(t) = [S(0)]^{\xi}e^{(-z+\xi\mu)t+\xi\sigma W(t)} \tag{9}$$

$\{Z(t)\}$ es otro Movimiento Browniano Geométrico con *Drift.*

Para aplicar el Teorema de Optional Sampling[1] debemos elegir el valor de ξ tal que $\{Z(t)\}$ sea martingala. Entonces, dado $\{Z(t)\}$ es un Movimiento Browniano geométrico con *drift,* sabemos que el mismo es Martingala si y sólo si

$$\mu^* + \frac{1}{2}[\sigma^*]^2 = 0 \tag{10}$$

En este caso,

$$\mu^* = -z + \xi\mu \tag{11}$$

$$\sigma^* = \xi\sigma \tag{12}$$

Por ende, {Z(t)} es Martingala si:

$$-z + \xi\mu + \frac{1}{2}\xi^2\sigma^2 = 0 \tag{13}$$

[1] Siendo {X(t)} martingala y acotado para todo t≥0, entonces: $E\{X(\tau)\} = E\{X(0)\}$.

Resolviendo esta ecuación cuadrática obtenemos que:

$$\xi = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 z}}{\sigma^2} \tag{14}$$

$$\xi = \frac{\mu}{\sigma^2}\left[-1 \pm \sqrt{1 + 2\frac{\sigma^2}{\mu^2}z}\right] \tag{15}$$

Dado que por debajo el Movimiento Browniano está acotado con la barrera L, entonces, para que esté acotado por arriba escogemos el valor Negativo de ξ. De esta forma, {Z(t)} es un Movimiento Browniano geométrico con *Drift* acotado para todo t.

$$\xi = \frac{\mu}{\sigma^2}\left[-1 - \sqrt{1 + 2\frac{\sigma^2}{\mu^2}z}\right] \tag{16}$$

Aplicando el Teorema de *Optional Sampling*, entonces:

$$E\{Z(\tau_L)\} = Z(0) \tag{17}$$

$$E\left\{e^{-z\tau_L}[S(\tau_L)]^{\xi}\right\} = e^{-z0}[S(0)]^{\xi} \tag{18}$$

$$E\left\{e^{-z\tau_L}[S(\tau_L)]^{\xi}\left[\mathrm{I}_{\{\tau_L<T\}} + \mathrm{I}_{\{\tau_L=T\}}\right]\right\}2 = [S(0)]^{\xi} \tag{19}$$

$$E\left\{e^{-z\tau_L}[S(\tau_L)]^{\xi}\mathrm{I}_{\{\tau_L<T\}} + \underbrace{e^{-z\tau_L}[S(\tau_L)]^{\xi}\mathrm{I}_{\{\tau_L=T\}}}_{=0}\right\} = [S(0)]^{\xi} \tag{20}$$

$$E\left\{e^{-z\tau_L}[S(\tau_L)]^{\xi}\mathrm{I}_{\{\tau_L<T\}}\right\} = [S(0)]^{\xi} \tag{21}$$

Como S(τ_L)=L para τ_L<T, entonces

$$E\left\{e^{-z\tau_L}L^{\xi}\mathrm{I}_{\{\tau_L<T\}}\right\} = [S(0)]^{\xi} \tag{22}$$

$$L^{\xi}E\left\{e^{-z\tau_L}\mathrm{I}_{\{\tau_L<T\}}\right\} = [S(0)]^{\xi} \tag{23}$$

$$E\left\{e^{-z\tau_L}\mathrm{I}_{\{\tau_L<T\}}\right\} = \left[\frac{S(0)}{L}\right]^{\xi} \tag{24}$$

$$E\left\{e^{-z\tau_L}\mathrm{I}_{\{\tau_L<T\}}\right\} = e^{b\xi} \tag{25}$$

[2] I_A es una variable aleatoria indicadora asociada al evento A. La misma es igual a 1 si el evento A ocurre e igual a 0 si el evento A no ocurre. Por ende, $\mathrm{I}_{\{\tau_L<\infty\}}$ es el indicador del evento$\{\tau_L < \infty\}$, $\mathrm{I}_{\{\tau_L=\infty\}}$ es el indicador del evento $\{\tau_L = \infty\}$ y $\left[\mathrm{I}_{\{\tau_L<\infty\}} + \mathrm{I}_{\{\tau_L=\infty\}}\right] = 1$.

Siendo

$$b = ln\left(\frac{S(0)}{L}\right) \tag{26}$$

Reemplazando por el valor de $\xi < 0$, obtenemos:

$$E\{e^{-z\tau_L}\} = e^{b\frac{\mu}{\sigma^2}\left[-1-\sqrt{1+2\frac{\sigma^2}{\mu^2}z}\right]} \tag{27}$$

De esta forma, se obtiene la transformada de Laplace de la distribución Gaussiana Inversa.

$$\tau_L \sim Gaussiana\ Inversa\ (\alpha^*, \beta^*)$$

con

$$\alpha^* = b\frac{\mu}{\sigma^2} \qquad y \qquad \beta^* = \frac{\mu^2}{\sigma^2}$$

Para obtener el precio teórico de la opción de compra exótica (la opción de Barrera) debemos calcular el Valor Actual del Payoff esperado considerando una tasa libre de riesgo "r".

$$\text{Valor Actual del Payoff Esperado} = E\left\{e^{-z\tau_L} \mathrm{I}_{\{\tau_L<T\}}\right\}$$

Dado que ya sabemos la distribución de τ_L y que

$$f_{\tau_L}(t) = \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}\sigma} e^{-\frac{(\mu t-b)^2}{2\sigma^2 t}} \tag{28}$$

Entonces, siendo t>0:

$$E\left\{e^{-z\tau_L} \mathrm{I}_{\{\tau_L<T\}}\right\} = \int_0^T e^{-rt} f_{\tau_L}(t)dt \tag{29}$$

$$E\left\{e^{-z\tau_L} \mathrm{I}_{\{\tau_L<T\}}\right\} = \int_0^T e^{-rt} \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}\sigma} e^{-\frac{(\mu t-b)^2}{2\sigma^2 t}} dt \tag{30}$$

$$E\left\{e^{-z\tau_L} \mathrm{I}_{\{\tau_L<T\}}\right\} = \int_0^T \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}\left[(\mu t-b)^2+2\sigma^2 t^2 r\right]} dt \tag{31}$$

Trabajamos con $[(\mu t - b)^2 + 2\sigma^2 t^2 r]$:

$$[(\mu t - b)^2 + 2\sigma^2 t^2 r] = \mu^2 t^2 - 2\mu t b + b^2 + 2\sigma^2 t^2 r \tag{32}$$

$$= t^2(\mu^2 + 2\sigma^2 r) + b^2 - 2\mu t b - 2t\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 r}b + 2t\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 r}b \tag{33}$$

$$= \left(t\sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2} - b\right)^2 + 2tb\left(\sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2} - \mu\right) \qquad (34)$$

Entonces,

$$E\{e^{-z\tau_L}\mathrm{I}_{\{\tau_L<T\}}\} = \int_0^T \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}\left[(\mu t-b)^2+2\sigma^2 t^2 r\right]}dt \qquad (35)$$

$$= \int_0^T \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}\left[\left(t\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}-b\right)^2+2tb\left(\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}-\mu\right)\right]}dt \qquad (36)$$

$$= e^{-\frac{2bt}{2\sigma^2 t}\left[\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}-\mu\right]} \int_0^T \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}\left[\left(t\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}-b\right)^2\right]}dt \qquad (37)$$

$$= e^{\frac{b}{\sigma^2}\left[\mu-\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}\right]} \underbrace{\int_0^T \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}\sigma} e^{-\left[t\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}-b\right]^2\frac{1}{2\sigma^2 t}}dt}_{\text{Densidad de la distribución Gaussiana Inversa}} \qquad (38)$$

con $\alpha^* = \frac{b}{\sigma^2}\sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}$

y $\beta^* = \frac{\mu^2+2r\sigma^2}{\sigma^2}$

La Distribución Gaussiana Inversa puede re-expresarse en términos de la distribución Normal estándar[3]. De esta forma, siendo N(x) la función de la distribución Normal Estándar, obtenemos:

$$E\{e^{-z\tau_L}\mathrm{I}_{\{\tau_L<T\}}\} = e^{\frac{b}{\sigma^2}\left[\mu-\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}\right]} \left[N\left(\frac{\beta^*T-\alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right) + e^{2\alpha^*}N\left(-\frac{\beta^*T+\alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right)\right] \qquad (39)$$

$$= e^{\frac{b}{\sigma^2}\left[\mu-\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}\right]} \left[N\left(\frac{\beta^*T-\alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right) + e^{2\left[\boldsymbol{\frac{b}{\sigma^2}\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}}\right]}N\left(-\frac{\beta^*T+\alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right)\right] \qquad (40)$$

$$= e^{\frac{b}{\sigma^2}\left[\mu-\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}\right]} N\left(\frac{\beta^*T-\alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right) + e^{\frac{b}{\sigma^2}\left[\mu-\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}\right]+\boldsymbol{\frac{2b}{\sigma^2}\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}}} N\left(-\frac{\beta^*T+\alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right) \qquad (41)$$

[3]Sea x una variable aleatoria que sigue una distribución Gaussiana Inversa con parámetros α y β, $F(x)$ puede reexpresarse como: $F(x) = N\left(\frac{\beta x-\alpha}{\sqrt{\beta x}}\right) + e^{2\alpha}N\left(-\frac{\beta x+\alpha}{\sqrt{\beta x}}\right)$ siendo N(x) la función de la distribución Normal Estandar.

$$= e^{\frac{b}{\sigma^2}\left[\mu-\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}\right]} N\left(\frac{\beta^*T-\alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right) + e^{\frac{b}{\sigma^2}\left[\mu-\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}+2\sqrt{\boldsymbol{\mu^2+2r\sigma^2}}\right]} N\left(-\frac{\beta^*T+\alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right) \quad (42)$$

$$= e^{\frac{b}{\sigma^2}\left[\mu-\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}\right]} N\left(\frac{\beta^*T-\alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right) + e^{\frac{b}{\sigma^2}\left[\mu+\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}\right]} N\left(-\frac{\beta^*T+\alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right) \quad (43)$$

Reemplazando $\alpha^* = \frac{b}{\sigma^2}\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}$ y $\beta^* = \frac{\mu^2+2r\sigma^2}{\sigma^2}$, se llega a:

$$\frac{\beta^*T-\alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}} = \frac{\frac{\mu^2+2r\sigma^2}{\sigma^2}T - \frac{b}{\sigma^2}\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}}{\sqrt{\frac{\mu^2+2r\sigma^2}{\sigma^2}T}} = \frac{\frac{1}{\cancel{\sigma^2}}\left[(\mu^2+2r\sigma^2)^{1-\frac{1}{2}}T - b\right]}{\frac{1}{\cancel{\sigma}}\sqrt{T}} \quad (44)$$

$$\frac{\beta^*T-\alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}} = \frac{\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}\,T-b}{\sigma\sqrt{T}} \quad (45)$$

Entonces,

$$N\left(\frac{\beta^*T-\alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right) = N\left(\frac{\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}\,T-b}{\sigma\sqrt{T}}\right) \quad (46)$$

Por otro lado,

$$-\frac{\beta^*T+\alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}} = -\frac{\frac{\mu^2+2r\sigma^2}{\sigma^2}T + \frac{b}{\sigma^2}\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}}{\sqrt{\frac{\mu^2+2r\sigma^2}{\sigma^2}T}} = -\frac{\frac{1}{\cancel{\sigma^2}}\left[(\mu^2+2r\sigma^2)^{1-\frac{1}{2}}T + b\right]}{\frac{1}{\cancel{\sigma}}\sqrt{T}} \quad (47)$$

$$-\frac{\beta^*T+\alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}} = -\frac{\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}\,T+b}{\sigma\sqrt{T}} \quad (48)$$

Entonces,

$$N\left(-\frac{\beta^*T+\alpha^*}{\sqrt{\beta^*T}}\right) = N\left(-\frac{\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}\,T+b}{\sigma\sqrt{T}}\right) \quad (49)$$

Finalmente,

Valor Actual del Payoff Esperado $= E\left\{e^{-z\tau_L}\mathrm{I}_{\{\tau_L<T\}}\right\} =$

$$e^{\frac{b}{\sigma^2}\left[\mu-\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}\right]}N\left(\frac{\sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}\,T - b}{\sigma\sqrt{T}}\right) + e^{\frac{b}{\sigma^2}\left[\mu+\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}\right]}N\left(-\frac{\sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}\,T + b}{\sigma\sqrt{T}}\right) \qquad (50)$$

En la práctica, la Opción de Barrera se valúa bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo. Así, la esperanza del payoff descontado, bajo esta medida, es el precio de la opción al momento 0.

Si se asume que el precio es un movimiento browniano geométrico con *drift*, entonces, la medida de probabilidad neutral al riesgo es:

$$\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2 \qquad (51)$$

Por ende, en este caso, tenemos que:

$$\sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2} = \sqrt{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 + 2r\sigma^2} \qquad (52)$$

$$= \sqrt{r^2 - \left(\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}\sigma^2 r\right) + \frac{1}{4}\sigma^4 + 2r\sigma^2} = \sqrt{r^2 - \sigma^2 r + \frac{1}{4}\sigma^4 + 2r\sigma^2} \qquad (53)$$

$$= \sqrt{\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2} = r + \frac{1}{2}\sigma^2 \qquad (54)$$

Es decir,

$$\sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2} = r + \frac{1}{2}\sigma^2 \qquad (55)$$

Siendo $\sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2} = r + \frac{1}{2}\sigma^2$, $\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2$ y $b = ln\left(\frac{S(0)}{L}\right)$, por un lado

$$e^{\frac{b}{\sigma^2}\left[\mu-\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}\right]} = e^{\frac{b}{\sigma^2}\left[r-\frac{1}{2}\sigma^2-\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\right]} = e^{\frac{b}{\sigma^2}\left[-\sigma^2\right]} = e^{-b} \qquad (56)$$

$$e^{\frac{b}{\sigma^2}\left[\mu-\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}\right]} = \frac{L}{S(0)} \qquad (57)$$

Y por otro lado,

$$e^{\frac{b}{\sigma^2}\left[\mu+\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}\right]} = e^{\frac{b}{\sigma^2}\left[r-\frac{1}{2}\sigma^2+r+\frac{1}{2}\sigma^2\right]} = e^{\frac{b}{\sigma^2}2r} = \left(e^b\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} \qquad (58)$$

$$e^{\frac{b}{\sigma^2}\left[\mu+\sqrt{\mu^2+2r\sigma^2}\right]} = \left(\frac{S(0)}{L}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} \qquad (59)$$

Finalmente,

$$\text{Valor Actual del Payoff Esperado} = E\left\{e^{-z\tau_L}\mathrm{I}_{\{\tau_L<T\}}\right\}$$

$$= \frac{L}{S(0)} N\left(\frac{\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)T - ln\left(\frac{S(0)}{L}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \left(\frac{S(0)}{L}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} N\left(-\frac{\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)T + ln\left(\frac{S(0)}{L}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) \quad (60)$$

Dada la ecuación a la cual llega el modelo propuesto (ecuación 60), se puede observar que si se tiende la barrera L a cero, el valor de la prima de riesgo es muy bajo. Esto es así ya que hacer tender la barrera L a cero implica suponer que la opción de barrera va a pagar cuando el precio de la acción sea cercano a cero, lo cual es poco probable. No es conveniente invertir en un instrumento financiero con un precio alto siendo poco probable que pague. Por ende, es importante destacar que, si una empresa autopartista quisiera comprar esta cobertura, la barrera que se decida fijar cumple un rol fundamental ya que de ella dependerá el precio que dicha autopartista deberá pagar con una periodicidad determinada. Por otro lado, para calibrar este modelo estocástico, los parámetros a tener en cuenta son: el precio de la acción al momento cero, la tasa libre de riesgo, la volatilidad del retorno de las acciones y el horizonte temporal.

4. SU APLICACIÓN COMO UNA HERRAMIENTA DE COBERTURA

En la Argentina, casi 400 firmas componen el sector autopartista, de las cuales un núcleo de las mismas registra exportaciones confirmando así que se trata de un sector con empresas altamente especializadas, con sistemas de producción eficientes y certificados en cuanto a su calidad. Según los datos de la Asociación de Fábricas de Automotores (Adefa), el acumulado de los primeros cinco meses del año 2014 mostró una baja de 22,2% respecto de igual período de 2013 debido a una retracción de la demanda exportadora y de las ventas en el mercado local. Otra de las causas que impactaron de forma negativa en los negocios de las autopartistas, según señalaron desde este sector, fue la cantidad de conflictos que se dieron en el interior de varios proveedores estratégicos, situaciones que llevaron a la suspensión temporal de las actividades en las instalaciones de varias terminales[4] .

Asimismo, en medio de esta caída de ventas también se incrementaron los costos de mano de obra por las paritarias, donde la UOM cerró para el año 2014 una mejora salarial del 29,6%. Pero lo que más preocupa a las empresas autopartistas, remarcaron al matutino, es la forma de pago de las automotrices: "Las fábricas no reconocen la nueva lista de precios y están pagando con la lista de hace cuatro meses, y tampoco reconocen el dólar importador, lo que nos está afectando financieramente porque nosotros tenemos que seguir entregando lo que producimos".

Resulta interesante poder darle un enfoque económico real a esta valuación de la opción de berrera ya que, hoy en día, en varios países la prevención de altos niveles de desempleo es un tema de gran envergadura. Se considera que este modelo podría evitar, en parte, la desvinculación de agentes económicos del mercado laboral. A pesar del gran desarrollo matemático, no hay que olvidarse que la idea central del modelo es lograr obtener cuánto deberían pagar las empresas autopartistas, cuyas ganancias dependen fuertemente de las empresas líderes automovilísticas, por

[4] La compañía de autopartes Visteon Corporation decidió cerrar su planta de Quilmes, en la zona sur del conurbano bonaerense, porque "no es financieramente viable para continuar operando". A causa de esta decisión, un total de 240 empleados de la fábrica" quedaron sin trabajo. Las otras autopartistas que sufren problemas similares a la norteamericana son Gestamp, en Escobar, y Lear, cuyos empleados continúan ocupando la planta de Tigre en reclamo por 100 despidos y 120 suspensiones. Ver nota del diario en http://www.infobae.com/2014/07/04/1578153-se-agudiza-la-crisis-el-sector-autopartes-otra-compania-cerro-una-sus-plantas

la compra de este seguro paramétrico. Esta cobertura tiene como fin compensar las pérdidas generadas en los períodos de producción baja y, de esta forma, poder superar las indeseadas etapas de crisis sin necesidad de recurrir a la reducción de gastos, en la cual se suele incluir como principal medida la disminución del personal y, por ende, dejar a muchos trabajadores sin su fuente generadora de recursos.

En estas situaciones sería útil contar con una cobertura como el que expone el modelo estocástico elegido, ya sea desde el lado del gobierno como una política pública para evitar parte del desempleo en épocas complicadas, otorgando subsidios a las autopartistas afectadas, o desde el sector privado como una medida para evitar el mal estar económico-financiero de la empresa. En el caso particular de la Argentina, el sector autopartista posee gran cantidad de empresas, por ende, el hecho de que haya una época de baja de producción afecta fuertemente a una gran cantidad de empleados.

5. CONCLUSIONES

En la economía real, una de las mayores preocupaciones a nivel mundial que poseen los países es el desempleo. En particular, en el mercado automotor, uno de los problemas más recientes, relacionados con esta temática, es el hecho de que las pymes autopartistas deben dejar a muchos empleados sin trabajo ya que no tienen los recursos suficientes para poder hacer frente a todas sus obligaciones. En general, esta falta de recursos se enfatiza cuando bajan las ventas de la empresa líder de la cual dependen. Por ende, las ganancias y la estabilidad de las empresas que producen partes de autos dependen fuertemente de lo que ocurre en el negocio de las empresas automotrices y, por ello, su rentabilidad puede ser explicada (en parte) por la evolución en la bolsa del precio de la acción de dicha empresa líder.

En el presente trabajo se trabajó con un modelo estocástico de valuación de una opción de barrera con el fin de lograr una cobertura ante estos posibles problemas de liquidez que se generan ante períodos de producción baja, ya que al recibir menos órdenes de compra, la autopartista se enfrenta a múltiple pérdidas económico-financieras. En un caso extremo, esto podría tener como consecuencia inmediata una gran reducción del personal o, peor aún, la quiebra de dicha pyme. La cobertura propuesta consiste en pagar un peso si la acción de la empresa líder toca, antes del vencimiento, un valor crítico predeterminado.

La importancia del uso de modelos estocásticos en el campo financiero-actuarial se debe a que la mayor parte de los riesgos que afectan a las diferentes empresas del mercado automotor implican situaciones que se desarrollan a lo largo del tiempo. En particular, el uso de los procesos martingala y movimiento browniano geométrico con *drift* son los más utilizados cuando se trabaja con precios de acciones. Si bien estos modelos estocásticos son de gran utilidad para el mundo real, en la práctica, su calibración no es sencilla. En general, esto se debe a una gran falta de acceso a la información. Algunos de estos obstáculos, entre varios, vienen por el lado de la dificultad de encontrar la frecuencia de los datos necesaria para que los mismos puedan ser utilizados en el modelo elegido, otros se deben a la falta de información sobre algunos derivados en los distintos mercados financieros mundiales.

Luego del desarrollo del modelo propuesto, se logró hallar una fórmula con parámetros conocidos que describe la prima que deberían pagar dichas autopartistas para estar cubierto ante períodos en los que se vean gravemente afectadas sus ganancias. Los parámetros relevantes al modelo son: el precio de la acción al momento cero, la tasa libre de riesgo, la volatilidad del retorno de las acciones y el horizonte temporal. Una vez establecidos los valores para dichos parámetros, la prima queda en función de la barrera “L” que se fije. Analizando la fórmula a la cual llega el modelo, se puede observar que la determinación de dicha barrera es crucial para hallar el precio de la prima. Se pudo concluir que mientras más bajo sea el valor de dicha barrera, la prima que deberá pagar la empresa en cuestión es menor, ya que la probabilidad de que el valor de una acción llegue a valores muy bajos es casi nula. Es lógico e intuitivo pensar que la prima de un seguro donde la contingencia tiene una probabilidad muy baja de ocurrencia sea chica.

Como bien se ha destacado en este trabajo, es importante tener presente que esta cobertura no sólo puede ser tomada por la empresa autopartista en cuestión, sino también puede ser puesta en práctica como una política pública. Desde este punto de vista, la compra de este seguro le serviría al gobierno para financiar a las empresas autopartistas donde se vea en peligro el empleo de gran cantidad de trabajadores. De esta forma, se evitaría recurrir a otras medidas de financiamiento público, como lo es la suba de impuestos. Es decir, se podría implementar esta cobertura desde el lado del sector público como una política pública para evitar parte del desempleo en épocas complicadas, otorgando subsidios a las autopartistas afectadas, o desde el sector privado como una medida para evitar el mal estar económico-financiero de la empresa.

Actualmente, existen diversos casos en Argentina que están sufriendo esta problemática y, peor aún, algunas de ellas han llegado al punto de tener la necesidad de cerrar la compañía. Las empresas que se conocieron mediáticamente por sufrir esta contingencia son: Visteon Corporation, Gestamp y Lear. La causa principal de este problema no sólo es la necesidad de fondeo para el desarrollo efectivo de sus principales actividades sino también el hecho de que estas pequeñas y medianas empresas deben operar en un mercado muy competitivo a nivel mundial y no cuentan con la posibilidad de ganar nuevos negocios importantes. Por ende, esta situación conlleva a no poder sostener las instalaciones y operar a menos de su capacidad total. En el peor de los casos, si dicha situación se sostiene en el tiempo, las autopartistas afectadas quedan fuera del mercado automotor.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alexandridis, A. K. and Zapranis A. D. (2013) Introduction to Stochastic Calculus. Weather Derivatives. Springer New York.

Baxter M. B. and Rennie A.J.O. (1996). Financial calculus, an introduction to derivative pricing. United Kingdom, Cambridge University press.

Cayón D. (2014). http://www.cronista.com/negocios/Otra-autopartista-baja-la-persiana-y-se-profundiza-la-crisis-del-sector-20140704-0007.html

Hull, J. (2009). Options, Futures, and Other Derivative Securities, 7th Edition. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall.

Klebaner F.C. (1998) Introduction to Stochastic Calculus with Applications. Imperial College Press.

Kurtz T. G. (2001) Lectures on Stochastic Analysis. Universidad de Wisconsin. Madison.

Lin, X.S. (2006). Introductory Stochastic Analysis for Finance and Insurance. Hoboken, NJ, John Wiley & Sons.

Lucia J. and Schwartz E. (2002) Electricity Prices and Power Derivatives: Evidence from the Nordic Power Exchange. Review of Derivatives Research.

Masaaki K. (1998) Stochastic processes with applications to finance. CRC Press.

Mccauley, J. L. (2013) Stochastic Calculus and Differential Equations for Physics and Finance. Cambridge University Press.

Mikosch T. (1998) Elementary Scholastic Calculus with Finance in View. World Scientific.

Neftci SN. (2000) Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives. Academic Press.

Panjer, H.H., Willmot, G.E. (1992). Insurance Risk Models. Society of Actuaries,Schaumburg.

Ski, Marek Capi, Marek Capiński, Ekkehard Kopp, and Janusz Traple. (2012) Stochastic Calculus for Finance. Cambridge University Press.

Sondermann Dieter. (2006) Introduction to Stochastic Calculus for Finance. Springer. Alemania.

Spiegel M. R. (1965). Laplace Transforms. Schaum's Outline Series, New York, McGraw-Hill.