CMA CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN METODOS CUANTITATIVOS APLICADOS A LA ECONOMÍA Y LA GESTIÓN IADCOM - UBA

Universidad de Buenos Aires Facultad de Ciencias Económicas

LATINDEX
http://www.latindex.org/atindex/ficha?folio=2751

http://ojs.econ.uba.ar/index.php/RIMF

¿CÓMO DETERMINAR EL CAPITAL NECESARIO PARA HACER FRENTE A LAS EROGACIONES EN LA EDAD PASIVA?

María Alejandra Metelli y Eduardo Angel Tarrullo

Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Económicas. Departamento Pedagógico de Matemática. Av. Córdoba 2122. Ciudad de Buenos Aires (C1120AAQ) Argentina.

ametelli@gmail.com y eatarullo@yahoo.com.ar

Resumen

Recibido: 06/2021

Aceptado: 10/2021

Muchas personas, a medida que van atravesando su edad activa, se preguntan cómo han de cubrir sus gastos en su etapa pasiva cuando ya sólo cuenten con su haber jubilatorio. La pregunta surge justamente porque el ritmo de crecimiento de los gastos es mayor al ritmo de crecimiento de los ingresos. De este modo, analizan la posibilidad de destinar una parte de sus ingresos en esta etapa activa para poder contar con un fondo acumulado al comienzo de la pasividad. El principal interrogante es entonces ¿a cuánto debe ascender el mismo?

Para poder dar respuesta a esta pregunta es necesario realizar una proyección que tenga en cuenta el importe con el que el individuo desee contar en cada período, si éste ha de ser constante o variable, a partir de qué edad, por cuantos años, qué tasas de interés se encuentran vigentes en el mercado.

De este modo, contando con estos elementos, resulta necesario calcular el valor actual a la edad seleccionada de esa sucesión de capitales futuros.

En el presente trabajo se analizarán los valores actuales señalados bajo los siguientes supuestos:

- Capitales variables anualmente en progresión aritmética.
- Certeza en el cobro de los capitales o aleatoriedad en el cobro de los capitales.

En consecuencia, se mostrarán los desarrollos correspondientes a las rentas financieras y seguros de vida de capitales múltiples de capital inicial unitario, variable anualmente en un valor constante calculado en función de un porcentaje establecido sobre el capital unitario inicial. A partir de las mismas, han de analizarse las relaciones, analogías y diferencias existentes entre los valores actuales correspondientes a flujos financieros y actuariales. Es decir, se tendrá en cuenta la factibilidad de pago: pagos ciertos o aleatorios para lo cual, en este último caso, se trabajará con una ley de mortalidad determinada.

El camino recorrido a lo largo del trabajo no sólo permitirá mostrar las analogías y diferencias existentes entre ambos tipos de renta sino además permitirá calcular qué importe se debería tener ahorrado al comienzo de la etapa pasiva bajo distintas situaciones.

Palabras clave

Renta financiera.
Certeza.
Seguros de vida de capitales múltiples.
Aleatoriedad.
Variación en progresión aritmética.

ISSN: 2250-687X - ISSN (En línea): 2250-6861

HOW TO DETERMINE THE NECESSARY AMOUNT TO PAY THE PERIODIC EXPENSES DURING RETIREMENT?

María Alejandra Metelli y Eduardo Angel Tarrullo

Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Económicas. Departamento Pedagógico de Matemática. Av. Córdoba 2122. Ciudad de Buenos Aires (C1120AAQ) Argentina.

ametelli@gmail.com y eatarullo@yahoo.com.ar

Abstract

KEYWORDS

Certain annuity.
Certainty.
Life insurance of multiple payments.
Randomness.
Variation in arithmetic progression.

Many people, through their active age, wonder how they will face their expenses while retired when they only count on their retirement income. The question arises because the expenses rate of growth is greater than the income rate of growth itself. Considering this situation, they analyze the possibility of allocating part of their current income during the active age to have an accumulated fund at the beginning of the passive age. The main question then is how much should that amount be?
To answer this question, it is necessary to carry out a projection that considers the amount of money that the person wishes to count on in each future period, if it will be constant or variable, the age of retirement, for how many years it will be in force, what interest rates are current in the market.
Thus, with these elements in mind, it is necessary to calculate the present value at the chosen age of that succession of future payments.
In this paper, the present values will be analyzed under the following assumptions:

- Variable annual payments in arithmetic progression.
- Certainty or randomness in the collection of the payments.

Consequently, the development of formulas corresponding to certain and contingent annuities of an initial unit payment and the following ones varying annually in a constant value based on a percentage established on the initial unit payment, will be shown. Based on these formulas, the relationships, analogies, and differences between the present values corresponding to financial and actuarial flows must be analyzed. That is, the feasibility of the payments will be considered: certain payments or random ones for which, in the latter case, a specific mortality law will be used.
This paper will not only show the existing analogies and differences between both types of annuities but also explain how to calculate the amount that should be saved at the beginning of the retirement age under different situations.

ISSN: 2250-687X - ISSN (En línea): 2250-6861

INTRODUCCIÓN

La mayoría de las personas, en su etapa activa, piensan cómo han de cubrir sus gastos en su etapa pasiva. De este modo, analizan la posibilidad de contar con un fondo acumulado al comienzo de esta etapa. El principal interrogante es ¿a cuánto debe ascender el mismo?

Para poder dar respuesta a esta pregunta es necesario realizar una proyección que tenga en cuenta el importe con el que el individuo desee contar en cada período, si éste ha de ser constante o variable, a partir de qué edad, por cuantos años, qué tasas de interés se encuentran vigentes en el mercado.

De este modo, contando con estos elementos, resulta necesario calcular el valor actual a la edad seleccionada de esa sucesión de capitales futuros.

En el presente trabajo se analizarán los valores actuales señalados bajo los siguientes supuestos:

- Capitales variables anualmente en progresión aritmética.
- Certeza en el cobro de los capitales o aleatoriedad en el cobro de los capitales.

En consecuencia, se mostrarán los desarrollos correspondientes a las rentas financieras y seguros de vida de capitales múltiples[1] de capital inicial unitario, variable anualmente en un valor constante calculado en función de un porcentaje establecido sobre el capital unitario inicial. A partir de las mismas, han de analizarse las relaciones, analogías y diferencias existentes entre los valores actuales correspondientes a flujos financieros y actuariales. Es decir, se tendrá en cuenta la factibilidad de pago: pagos ciertos o aleatorios para lo cual, en este último caso, se trabajará con una ley de mortalidad determinada.

A partir de las fórmulas obtenidas se determinarán, en distintas situaciones, los valores actuales correspondientes a fines comparativos. Para mostrar que dicho valor actual fue correctamente calculado se determinarán los saldos en las marchas progresivas correspondientes haciendo hincapié en aquellos conceptos que sólo se verifican en las rentas actuariales.

El camino recorrido a lo largo del trabajo no sólo permitirá mostrar las analogías y diferencias existentes entre ambos tipos de renta sino además permitirá calcular qué importe se debería tener ahorrado al comienzo de la etapa pasiva bajo distintas situaciones.

Si bien existen varias simplificaciones en el análisis que se realiza (tasa de interés constante, periodicidad anual de pagos), su utilidad radica en poder entender las analogías y diferencias entre rentas financieras y aleatorias a los efectos de determinar los capitales necesarios para poder financiar los pagos futuros.

[1] En el resto del texto se hará referencia a ellos con la expresión rentas actuariales.

1. ELEMENTOS TÉCNICOS Y NOMENCLATURA UTILIZADA

i: tasa de interés periódica expresada en tanto por uno.

r: razón aditiva de variación periódica de los capitales expresada por unidad de capital.

v: factor de actualización financiero del capital unitario calculado a la tasa periódica i.

v^t: valor actual financiero del capital unitario exigible al cabo de t años.

a: razón anual de permanencia por supervivencia.

x: edad de la persona al momento de realizar la valuación

$\mathrm{p}(\mathrm{x};\mathrm{t})$: probabilidad de que una persona de edad x alcance con vida la edad $x+t$.

$\mathrm{E}(\mathrm{x};\mathrm{t})$: valor actual actuarial a la edad x del capital unitario exigible en el momento t si la persona de edad x se encuentra con vida.

$af(m;n;i)$: valor actual financiero de una sucesión de n capitales unitarios pagaderos periódicamente, el primero de ellos exigible m períodos con posterioridad al momento de valuación.

$afv_a(m;n;i;r)$: valor actual financiero de una sucesión de n capitales variables en una razón aditiva r aplicada sobre el capital vigente el período inmediato anterior pagaderos periódicamente, el primero de ellos exigible m períodos con posterioridad al momento de valuación.

$a(x;m;n)$: valor actual actuarial a la edad x de una serie de n capitales unitarios pagaderos anualmente a la persona de edad x en cada cumpleaños si la misma se encuentra con vida, el primero de ellos exigible en el momento m, posterior al momento de valuación.

$av_a(x;m;n;r)$: valor actual actuarial a la edad x de una serie de n capitales variables en una razón constante r aplicada sobre el capital inicial r, pagaderos anualmente a la persona de edad x en cada cumpleaños si la misma se encuentra con vida, el primero de ellos exigible en el momento m, posterior al momento de valuación.

Debe destacarse que en el caso de las rentas financieras se habla de períodos mientras que en el caso de las rentas actuariales se hace mención sólo a la periodicidad anual. Ello es así porque en las primeras las fórmulas resultan equivalentes para cualquier periodicidad en tanto la tasa de interés y el plazo estén expresados en la misma unidad de medida. En cambio, en el caso de las rentas actuariales, no puede aplicarse la misma fórmula a todas las periodicidades dado que en su cálculo intervienen las probabilidades de supervivencia para cuya determinación deben emplearse supuestos específicos que afectan, en consecuencia, las fórmulas de cálculo.

A fin de efectuar entonces el análisis comparativo, se trabajará en ambos casos con periodicidad anual.

2. DIFERENCIAS BÁSICAS ENTRE LAS SUCESIONES FINANCIERAS Y LOS SEGUROS DE VIDA DE CAPITALES MÚLTIPLES

En ambos casos se trabaja con una sucesión de capitales equidistantes entre sí que pueden ser constantes o variables. El objetivo consiste en llevar adelante la valuación de esa sucesión de capitales. La mencionada valuación puede tener lugar en cualquier momento; ya sea dentro o fuera del período de exigibilidad de los capitales. Si el momento seleccionado para la valuación es anterior o coincidente con el de la exigibilidad del primer capital se habla de cálculo de valor actual, comúnmente denominado rentas, mientras que, si el mismo es posterior o coincidente con el momento de exigibilidad del último capital, se hace referencia al cálculo de valores finales, comúnmente denominados imposiciones.

Para poder llevar adelante el cálculo mencionado, resulta entonces necesario definir la tasa de interés de valuación para el caso de trabajar con rentas financieras, a la que debe agregarse una tabla de mortalidad o ley de mortalidad si se trata de las rentas actuariales.

Ello es así porque en el caso de rentas financieras, el pago de los capitales exigibles en los distintos momentos es de carácter cierto mientras que, en el caso de las rentas actuariales, su pago resulta aleatorio. La condición de pago de estos últimos es que la persona sobre cuya cabeza se realizan las proyecciones se encuentre con vida al momento de cobro.

De acuerdo con lo previamente expuesto, entonces, resulta necesario indicar cómo han de ser calculadas esas probabilidades de supervivencia. Pueden emplearse a tal fin:

- Leyes de mortalidad: las que más se utilizan son las de De Moivre – decrecimiento lineal – y de Dormoy– decrecimiento exponencial.
- Tablas de mortalidad: son las que emplean las empresas aseguradoras cuando calculan las primas correspondientes a este tipo de seguro.

En el presente trabajo, el desarrollo será realizado aplicando la ley de Dormoy.

2.1 Renta financiera de capital inicial unitario variable en progresión aritmética

Las rentas financieras se caracterizan por ser una sucesión de n capitales pagaderos periódicamente, con certeza. A continuación se analizan las rentas financieras de capital inicial unitario variable en una razón aditiva r, constante, aplicada sobre el capital vigente el período inmediato anterior, conocidas como rentas financieras de capital inicial unitario variables en progresión aritmética.

El valor actual de una sucesión de n pagos de capital inicial unitario y los siguientes, variables en una razón aditiva r constante, siendo $r \geq -1/(n-1)$, aplicada sobre el capital vigente el período inmediato anterior, resulta:

$$af v_a(m;n;i;r) = \sum_{t=1}^{n}[1+(t-1).r].v^{m+t-1} = v^m.\sum_{t=1}^{n}[1+(t-1).r].v^{t-1} =$$

$$= v^m.\left[\sum_{t=1}^{n} v^{t-1} + \sum_{t=1}^{n}(t-1).r.v^{t-1}\right] =$$

$$= v^m.\sum_{t=1}^{n} v^{t-1} + v^m.\sum_{t=1}^{n}(t-1).r.v^{t-1}$$

donde: $v = 1/(1+i)$. Por simplicidad se supone que $m,n \in N^*$ y se asume que $i > 0$.

Nótese que operando sobre la última expresión, se tiene que:

1) $v^m.\sum_{t=1}^{n} v^{t-1} = af(m;n;i) = v^m.af(0;n;i)$

Recuérdese que $af(m;n;i)$ representa el valor actual de una sucesión de n capitales unitarios pagaderos periódicamente, el primero de ellos exigible m períodos con posterioridad al momento de valuación y se calcula como:

$$af(m;n;i) = \sum_{t=1}^{n} v^{m+t-1} = v^m.\sum_{t=0}^{n-1} v^t = v^m.\left(\frac{1-v^n}{1-v}\right) = v^m.\left(\frac{1-v^n}{d}\right)$$

donde: $d = i/(1+i)$.

Asignando $m = 0$ y $m = 1$ en la expresion anterior, se obtienen:

$$af(0;n;i) = \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{d} \qquad \text{renta inmediata de pagos adelantados}$$

$$af(1;n;i) = v.\left(\frac{1 - v^n}{1 - v}\right) = \frac{1 - v^n}{i} \qquad \text{renta inmediata de pagos vencidos}$$

2) $v^m.\sum_{t=1}^{n}(t-1).r.v^{t-1} = v^m.r.\sum_{t=1}^{n}(t-1).v^{t-1} =$

$$= v^m.r.\sum_{t=1}^{n-1} af(t;n-t;i) = v^m.r.\sum_{t=1}^{n-1} v^t.\left(\frac{1 - v^{n-t}}{1 - v}\right) =$$

$$= \frac{v^m}{1 - v}.r.\sum_{t=1}^{n-1}(v^t - v^n) = \frac{v^m}{1 - v}.r.\left[\sum_{t=1}^{n-1} v^t - \sum_{t=1}^{n-1} v^n\right] =$$

$$= \frac{v^m}{1 - v}.r.[af(1;n-1;i) - (n-1).v^n] =$$

$$= \frac{v^m}{1 - v}.r.[af(1;n-1;i) - (n-1).v^n + v^n - v^n] =$$

$$= \frac{v^m}{1 - v}.r.[af(1;n;i) - n.v^n] =$$

$$= \frac{v^m}{d}.r.[af(1;n;i) - n.v^n]$$

Por lo tanto, reemplazando convenientemente estos desarrollos en la expresión original, resulta:

$$afv_a(m;n;i;r) = af(m;n;i) + \frac{v^m}{d}.r.[af(1;n;i) - n.v^n] =$$

$$= v^m.\left\{af(0;n;i) + \frac{r}{d}.[af(1;n;i) - n.v^n]\right\}$$

Finalmente, sustituyendo por las expresiones analíticas de las rentas de capitales unitarios constantes, inmediatas, de pagos adelantados y vencidos vistas anteriormente, se tiene que:

$$afv_a(m;n;i;r) = v^m.\left[\frac{1 - v^n}{d} + \frac{r}{d}.\left(\frac{1 - v^n}{i} - n.v^n\right)\right] =$$

$$= \frac{v^m}{d}.\left[(1 - v^n).\left(1 + \frac{r}{i}\right) - n.r.v^n\right] =$$

$$= \frac{v^{m-1}}{i}.\left[(1 - v^n).\left(1 + \frac{r}{i}\right) - n.r.v^n\right] =$$

$$= v^{m-1}.\left[\left(\frac{1 - v^n}{i}\right).\left(1 + \frac{r}{i}\right) - n.\frac{r}{i}.v^n\right] =$$

$$= \; v^{m-1}.\left[\left(1 + \frac{r}{i}\right).af(1;n;i) \; - \; n.\frac{r}{i}.v^n\right]$$

Alternativamente, operando sobre la primera igualdad en la expresión anterior, se obtiene:

$$afv_a(m;n;i;r) \; = \; v^m.\left[\frac{1 - \; v^n}{d} \; + \; \frac{r}{d}.\left(\frac{1 - \; v^n}{i} \; - \; n.v^n\right)\right] =$$

$$= \frac{v^m - v^{m+n}}{1-v} + \frac{r.v^{m+1}}{1-v}.\left[\frac{1 - v^{n-1}}{1-v} - (n-1).v^{n-1}\right]$$

Como se estableció precedentemente, se supone que $m,n \in N^*$ y se asume que $i > 0$.

Estas rentas son habitualmente denominadas rentas financieras de capital inicial unitario variables en progresión aritmética.

Obsérvese que si $r = 0$, la expresión anterior resulta:

$$afv_a(m;n;i;0) = v^m.\left(\frac{1 - \; v^n}{d}\right) = v^{m-1}.\left(\frac{1 - \; v^n}{i}\right) = \; af(m;n;i)$$

Dos casos particulares se obtienen asignando $m = 0$ y $m = 1$ en las expresiones anteriores:

$$afv_a(0;n;i;r) \; = \; af(0;n;i) + \frac{r}{d}.[af(1;n;i) \; - \; n.v^n] \; =$$

$$= \frac{1 - \; v^n}{d} + \frac{r}{d}.\left(\frac{1 - \; v^n}{i} \; - \; n.v^n\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{r}{i}\right).\frac{1 - \; v^n}{d} \; - \; n.\frac{r}{d}.v^n$$

$$afv_a(1;n;i;r) = \left(1 + \frac{r}{i}\right).af(1;n;i) \; - \; n.\frac{r}{i}.v^n$$

$$= \left(1 + \frac{r}{i}\right).\left(\frac{1 - \; v^n}{i}\right) - \; n.\frac{r}{i}.v^n$$

Operando convenientemente, estas rentas pueden expresarse también como sigue:

$$afv_a(0;n;i;r) \; = \; \frac{1 - v^n}{1-v} + \frac{r.}{1-v}.\left[\frac{v.(1 + (n-1).v^n) - n.v^n}{1-v}\right]$$

$$afv_a(1;n;i;r) \; = \; v.\frac{1 - v^n}{1-v} + \frac{r.v}{1-v}.\left[\frac{1 - v^{n-1}}{1-v} - (n-1).v^{n-1}\right]$$

En el caso particular en que $r = 0$, las expresiones anteriores resultan:

$$afv_a(0;n;i;0) \; = \; \frac{1 - \; v^n}{d} \; = \; af(0;n;i)$$

$$afv_a(1;n;i;0) \; = \; \frac{1 - \; v^n}{i} \; = \; af(1;n;i)$$

2.2 Renta perpetua

Cuando n crece indefinidamente ($n \rightarrow \infty$), la renta resulta ser una sucesión de infinitos capitales pagaderos periódicamente, el primero de ellos exigible m períodos con posterioridad al momento de valuación. Estas rentas que tienen un capital inicial unitario y los siguientes variables en una razón aditiva r, constante. aplicada sobre el capital vigente el período inmediato anterior, se denominan rentas financieras perpetuas de capital inicial unitario variables en progresión aritmética. Calculando el $\lim\limits_{n \to \infty} afv_a(m;n;i;r)$, se obtiene:

$$\lim_{n \to \infty} afv_a(m;n;i;r) = afv_a(m;\infty;i;r) = \lim_{n \to \infty} \frac{v^m}{d}.\left[(1 - v^n).\left(1 + \frac{r}{i}\right) - n.r.v^n\right] =$$

$$= \frac{v^m}{d}.\left[\left(1 - \lim_{n \to \infty} v^n\right).\left(1 + \frac{r}{i}\right) - n.r.\lim_{n \to \infty} v^n\right] =$$

$$= \frac{v^m}{d}.\left(1 + \frac{r}{i}\right) = \frac{v^{m-1}}{i}.\left(1 + \frac{r}{i}\right)$$

Dos casos particulares de interés que se obtienen de la expresión anterior cuando:

$$m = 0 \qquad \lim_{n \to \infty} afv_a(0;n;i;r) = afv_a(0;\infty;i;r) = \frac{1}{d}.\left(1 + \frac{r}{i}\right)$$

$$m = 1 \qquad \lim_{n \to \infty} afv_a(1;n;i;r) = afv_a(1;\infty;i;r) = \frac{1}{i}.\left(1 + \frac{r}{i}\right)$$

Nótese que si $r = 0$, resulta:

$$\lim_{n \to \infty} afv_a(m;n;i;0) = afv_a(m;\infty;i;r) = \frac{v^m}{d} = \frac{v^{m-1}}{i} = af(m;\infty;i)$$

Casos particulares de interés que se obtienen de la expresión anterior son:

$m = 0$: $\lim\limits_{n \to \infty} af(0;n;i) = af(0;\infty;i) = \dfrac{1}{1 - v} = \dfrac{1}{d}$ perpetuidad de pagos adelantados

$m = 1$: $\lim\limits_{n \to \infty} af(1;n;i) = af(1;\infty;i) = \dfrac{v}{1 - v} = \dfrac{1}{i}$ perpetuidad de pagos vencidos

2.3 Análisis del comportamiento de la función $afv_a(m;n;i;r)$

A continuación se analiza la sensibilidad del valor de la función $afv_a(m;n;i;r)$ ante la variación del valor de una de sus variables, *ceteris paribus*. considerando que el plazo de diferimiento (m) y el plazo de pago (n) se tratan como variables discretas y la tasa de interés (i) y la razón aditiva de variación periódica de los capitales (r) como variables continuas.

1) Conforme aumenta el plazo de diferimiento se reduce el valor actual de la renta. Esto es:

$$\Delta_m\, afv_a(m;n;i;r) = afv_a(m+1;n;i;r) - afv_a(m;n;i;r) =$$

$$= v^{m+1}.\left\{af(0;n;i) + \frac{r}{d}.[af(1;n;i) - n.v^n]\right\} -$$

$$- v^m.\left\{af(0;n;i) + \frac{r}{d}.[af(1;n;i) - n.v^n]\right\} =$$

$$= (v-1).v^m.afv_a(0;n;i;r) < 0$$

2) Si se incrementa el número de pagos, el valor actual de la renta aumenta. En efecto:

$$\Delta_n\, afv_a(m;n;i;r) = afv_a(m;n+1;i;r) - afv_a(m;n;i;r) =$$

$$= v^m.\left\{af(0;n+1;i) + \frac{r}{d}.[af(1;n+1;i) - (n+1).v^{n+1}]\right\} -$$

$$- v^m.\left\{af(0;n;i) + \frac{r}{d}.[af(1;n;i) - n.v^n]\right\} =$$

$$= v^m.[af(0;n+1;i) - af(0;n;i)] +$$

$$+ v^m.\frac{r}{d}.[af(1;n+1;i) - (n+1).v^{n+1} - af(1;n;i) + n.v^n]$$

En la última expresión, el primer término puede simplificarse:

$$v^m.[af(0;n+1;i) - af(0;n;i)] = v^m.\left(\sum_{t=0}^{n} v^t - \sum_{t=0}^{n-1} v^t\right) = v^m.v^n = v^{m+n}$$

En tanto, reemplazando por las fórmulas de las rentas de capitales constantes en el segundo término, resulta:

$$v^m.\frac{r}{d}.[af(1;n+1;i) - (n+1).v^{n+1} - af(1;n;i) + n.v^n] =$$

$$= v^m.\frac{r}{d}.[af(1;n+1;i) - af(1;n;i) + n.v^n - (n+1).v^{n+1}] =$$

$$= v^m.\frac{r}{d}.[v^n + n.v^n - (n+1).v^{n+1}] = v^{m+n}.\frac{r}{d}.[(n+1) - (n+1).v] =$$

$$= v^{m+n}.(n+1)\frac{r}{d}.(1-v) = v^{m+n}.(n+1)\frac{r}{d}.d = v^{m+n}.(n+1).r$$

Luego, para cualquier r admisible:

$$\Delta_n\, afv_a(m;n;i;r) = v^{m+n} + v^{m+n}.(n+1).r = v^{m+n}.[1 + (n+1)r] > 0$$

3) Ante un aumento marginal de la tasa de interés, se reduce el valor actual de la renta.

$$\frac{\partial afv_a(m;n;i;r)}{\partial i} = \frac{\partial}{\partial i}\sum_{t=1}^{n}[1+(t-1).r].v^{m+t-1} = \sum_{t=1}^{n}[1+(t-1).r].\frac{d}{di}v^{m+t-1} =$$

$$= \sum_{t=1}^{n}[1+(t-1).r].(m+t-1).v^{m+t-2}.\frac{dv}{di} =$$

$$= \sum_{t=1}^{n}[1+(t-1).r].(m+t-1).v^{m+t-2}.\frac{d}{di}\left(\frac{1}{1+i}\right) =$$

$$= \sum_{t=1}^{n}[1+(t-1).r].(m+t-1).v^{m+t-2}.\left[-\frac{1}{(1+i)^2}\right] =$$

$$= \sum_{t=1}^{n}[1+(t-1).r].(m+t-1).v^{m+t-2}.[-v^2] =$$

$$= -\, v^m . \sum_{t=1}^{n} [1 + (t-1).r].(m+t-1).v^t < 0$$

4) Cuando se incrementa marginalmente la razón aditiva r, constante, aplicada sobre el capital vigente el período inmediato anterior, se incrementa el valor actual de la renta.

$$\frac{\partial afv_a(m;n;i;r)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\sum_{t=1}^{n}[1+(t-1).r].v^{m+t-1} =$$

$$= \sum_{t=1}^{n}\frac{\partial}{\partial r}[1+(t-1).r].v^{m+t-1} =$$

$$= \sum_{t=1}^{n}(t-1).v^{m+t-1} = v^m . \sum_{t=1}^{n}(t-1).v^{t-1} > 0$$

2.4 Rentas actuariales con capital inicial unitario variable en progresión aritmética

Se pueden definir este tipo de rentas de la siguiente forma: "El asegurado mediante el pago de la/s prima/s, transfiere al asegurador el riesgo del plan; y éste le acuerda cobertura de vida de riesgo diferido y plazo limitado, consistente en el pago del capital unitario variable en una razón r sobre el capital inicial, al comienzo de cada año mientras viva, a partir de un plazo m determinado y por el plazo n establecido"

El valor actual mencionado se obtiene como suma de los valores actuales actuariales de los sucesivos capitales; es decir:

$$av_a\,(x;m;n;r) = \sum_{t=0}^{n-1}(1+t.r).E\,(x;m+t)$$

Que puede escribirse como:

$$av_a\,(x;m;n;r) = a(x;m;n) + aI(x;m+1;n-1)$$

donde:

$$a\,(x;m;n) = \sum_{t=m}^{m+n-1} p(x;t)\,v^t$$

Se reemplaza la probabilidad de vida por la expresión equivalente bajo la ley de mortalidad de Dormoy:

$$a\,(x;m;n) = \sum_{t=m}^{m+n-1} a^t\,v^t$$

Se trata de una suma de términos variables en progresión geométrica con primer término igual a $a^m\,v^m$, razón igual a $a.v$ y n términos. En consecuencia, al aplicar la fórmula de la suma se llega a:

$$a\,(x;m;n) = \frac{(a.v)^m - (a.v)^{m+n}}{1 - a.v}$$

Además:

$$aI(x;m;n) = E(x;m).aI\ (x+m;0;n)$$

donde $aI(x;m;n)$ es el valor actual a la edad x de una sucesión de n capitales pagaderos mientras la persona se encuentre con vida, el primero de ellos unitario y exigible m años después del momento de valuación y los siguientes crecientes anualmente en un importe equivalente al capital inicial. Puede escribirse como:

$$aI(x;m;n) = E(x;m).\sum_{t=0}^{n-1} a(x+m;t;n-t)$$

Se reemplaza $a(x+m;t;n-t)$ por su expresión equivalente bajo la ley de Dormoy y se obtiene la siguiente expresión:

$$aI(x;m;n) = (a.v)^m.\sum_{t=0}^{n-1} \frac{(a.v)^t - (a.v)^n}{1-a.v}$$

Se distribuye la suma anterior, con lo cual:

$$aI(x;m;n) = \frac{(a.v)^m}{1-a.v}.\left[\sum_{t=0}^{n-1}(a.v)^t - \sum_{t=0}^{n-1}(a.v)^n\right]$$

De este modo, la expresión final resultante es:

$$aI(x;m;n) = \frac{(a.v)^m}{1-a.v}.\left[\frac{1-(a.v)^n}{1-a.v} - n.(a.v)^n\right]$$

En forma análoga puede escribirse:

$$aI(x;m+1;n-1) = \frac{(a.v)^{m+1}}{1-a.v}.\left[\frac{1-(a.v)^{n-1}}{1-a.v} - (n-1).(a.v)^{n-1}\right]$$

Con lo cual, la expresión final para estas rentas actuariales variables en progresión aritmética de razón r es:

$$av_a(x;m;n;r) = \frac{(a.v)^m - (a.v)^{m+n}}{1-a.v} + \frac{r.(a.v)^{m+1}}{1-a.v}.\left[\frac{1-(a.v)^{n-1}}{1-a.v} - (n-1).(a.v)^{n-1}\right] =$$

$$= (a.v)^m.\left\{\frac{1-(a.v)^n}{1-a.v} + \frac{r.(a.v)}{1-a.v}.\left[\frac{1-(a.v)^{n-1}}{1-a.v} - (n-1).(a.v)^{n-1}\right]\right\}$$

En el caso particular de riesgo inmediato y plazo limitado; es decir, cuando m= 0, se tiene que:

$$av_a\ (x;0;n;r) = \frac{1-(a.v)^n}{1-a.v} + \frac{r}{1-a.v}.\left[\frac{a.v.(1+(n-1).(a.v)^n) - n.(a.v)^n}{1-a.v}\right]$$

y si m= 1 rentas diferidas por un año, resulta:

$$av_a(x;1;n;r) = (a.v).\left\{\frac{1-(a.v)^n}{1-a.v} + \frac{r}{1-a.v}.\left[\frac{a.v.(1+(n-1).(a.v)^n) - n.(a.v)^n}{1-a.v}\right]\right\}$$

Como caso particular se menciona el seguro de vida de capitales múltiples de riesgo inmediato, sin límite; es decir, la persona ha de cobrarlo de por vida. Es similar al concepto financiero de renta perpetua. Cabe mencionar que en las rentas actuariales el último capital probable es el exigible a la edad denominada $w-1$ (dado que a la edad w ya no existen sobrevivientes. En este trabajo se realiza la simplificación $n \rightarrow \infty$ solo a efectos comparativos.

$$\lim_{n\to\infty} av(x;m;n;r) = \frac{(a.v)^{m+1}}{1-a.v} + r.\frac{(a.v)^{m+1}}{(1-a.v)\text{^}2}$$

Que para el caso particular de riesgo inmediato resulta:

$$\lim_{n\to\infty} av(x;0;n;r) = \frac{1}{1-a.v}.(1+\frac{r.a.v}{1-a.v})$$

Y para el de riesgo diferido por un año:

$$\lim_{n\to\infty} av(x;1;n;r) = \frac{a.v}{1-a.v}.(1+\frac{r.a.v}{1-a.v})$$

2.5 Análisis del comportamiento de la función $\boldsymbol{av_a(x;m;n;i;r)}$

Se analiza el comportamiento de la función ante la variación de cada una de las variables relevantes en el desarrollo, *ceteris paribus*:

1) Respecto al plazo de diferimiento

$$\Delta_m\, av_a(x;m;n;r) = (\,1+(n-1).r).E(x;m+n) - (1+r.a(x;m+1{:}n-1))$$

Al reemplazar por la ley de Dormoy, se llega a:

$$\Delta_m\, av_a(x;m;n;r) = (\,1+(n-1).r).(a.v)^{m+n} - \left(1+r.\;\frac{(a.v)^{m+1}-(a.v)^{m+n}}{1-a.v}\right) < 0$$

Puede observarse que el aumento en la distancia entre el momento de valuación y la exigibilidad del primer pago provoca una disminución en el valor actual analizado.

2) Respecto al plazo de cobertura:

$$\Delta_n\, av_a(x;m;n;r) = (\,1+r.n).E(x;m+n)$$

Al reemplazar por la ley de Dormoy, se llega a:

$$\Delta_n\, av_a(x;m;n;r) = (\,1+r.n).(a.v)^{m+n} > 0$$

El aumento de la cantidad de capitales provoca un aumento en el valor actual.

3) Respecto a la tasa de variación anual de capitales

$$\frac{\partial av_a(x;m;n;r)}{\partial r} = aI(x;m+1;n-1)$$

Se reemplaza por la expresión obtenida bajo la ley de Dormoy en el caso particular de las de riesgo inmediato, y resulta la siguiente expresión:

$$\frac{\partial av_a(x;0;n;r)}{\partial r} = \frac{1}{1-a.v}.\left(\frac{a.v.(1+(n-1).(a.v)^n)-n.(a.v)^n}{1-a.v}\right) > 0$$

Un aumento en la tasa de variación anual de capitales, produce un aumento en el valor actual de los seguros de vida variables en progresión aritmética.

4) Respecto a la tasa de interés

$$\frac{\partial av_a(x;m;n;r)}{\partial i} = -v\,.\sum_{t=m}^{m+n-1}(1+t.r).(t+m).(a.v)^{t+m} < 0$$

Se observa que un aumento en la tasa de interés produce una disminución en el valor actual de las rentas actuariales variables en progresión aritmética.

5) Respecto a la razón anual de permanencia por supervivencia

$$\frac{\partial av_a(x;m;n;r)}{\partial a} = a^{-1}\,.\sum_{t=m}^{m+n-1}(1+t.r).(t+m).(a.v)^{t+m} > 0$$

Se observa que un aumento en la razón anual de permanencia por supervivencia produce un aumento en el valor actual de las rentas actuariales variables en progresión aritmética. Ello se debe a que el aumento en esta razón anual indica qué número de sobrevivientes considerado al que ha de abonarse el capital es superior.

3. MARCHAS PROGRESIVAS

Se muestran a continuación ejemplos de evolución de saldos – marchas progresivas – para las rentas financieras y los seguros de vida de capitales múltiples considerando los siguientes supuestos:

- Tasa de interés: 3 % efectivo anual
- Tasa de variación aditiva de los capitales: 5 % anual
- Tasa de permanencia por supervivencia: 0.96
- Cantidad máxima de capitales probables: 15[2]

En todos los casos se trabaja con un capital inicial unitario.

Estas marchas progresivas permiten demostrar lo que se denomina suficiencia del capital invertido o prima, según el caso. Lo que se demuestra entonces es que, invirtiendo el dinero recibido a la tasa de interés pactada y verificándose la ley de mortalidad establecida en el caso de los seguros de vida de capitales múltiples, se alcanza a cumplir con los compromisos asumidos.

[2] La aclaración de probables es válida sólo para el caso de loa rentas actuariales en el cual el pago del capital está condicionado a la supervivencia de la persona.

3.1 Rentas financieras

Capital inicial unitario variables en progresión aritmética: $afv_a(0;15;0,03;0,05)$

PERIODO	SALDO AL INICIO	PAGO	SALDO	INTERESES FINANCIEROS	SALDO FINAL
0	16,2616	1,0000	15,2616	0,4578	15,7194
1	15,7194	1,0500	14,6694	0,4401	15,1095
2	15,1095	1,1000	14,0095	0,4203	14,4298
3	14,4298	1,1500	13,2798	0,3984	13,6782
4	13,6782	1,2000	12,4782	0,3743	12,8525
5	12,8525	1,2500	11,6025	0,3481	11,9506
6	11,9506	1,3000	10,6506	0,3195	10,9701
7	10,9701	1,3500	9,6201	0,2886	9,9087
8	9,9087	1,4000	8,5087	0,2553	8,7640
9	8,7640	1,4500	7,3140	0,2194	7,5334
10	7,5334	1,5000	6,0334	0,1810	6,2144
11	6,2144	1,5500	4,6644	0,1399	4,8044
12	4,8044	1,6000	3,2044	0,0961	3,3005
13	3,3005	1,6500	1,6505	0,0495	1,7000
14	1,7000	1,7000	0,0000	0,0000	0,0000

Capitales unitarios constantes: $afv_a(0;15;0,03;0) = \ af(0;15;0,03)$

PERIODO	SALDO AL INICIO	PAGO	SALDO	INTERESES FINANCIEROS	SALDO FINAL
0	12,2961	1,0000	11,2961	0,3389	11,6350
1	11,6350	1,0000	10,6350	0,3190	10,9540
2	10,9540	1,0000	9,9540	0,2986	10,2526
3	10,2526	1,0000	9,2526	0,2776	9,5302
4	9,5302	1,0000	8,5302	0,2559	8,7861
5	8,7861	1,0000	7,7861	0,2336	8,0197
6	8,0197	1,0000	7,0197	0,2106	7,2303
7	7,2303	1,0000	6,2303	0,1869	6,4172
8	6,4172	1,0000	5,4172	0,1625	5,5797
9	5,5797	1,0000	4,5797	0,1374	4,7171
10	4,7171	1,0000	3,7171	0,1115	3,8286
11	3,8286	1,0000	2,8286	0,0849	2,9135
12	2,9135	1,0000	1,9135	0,0574	1,9709
13	1,9709	1,0000	0,9709	0,0291	1,0000
14	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000

3.2 Seguros de vida de capitales múltiples

Capital inicial unitario variables en progresión aritmética: $av_a(X; 0; 15; 0,03; 0,05)$

PERIODO	SALDO AL INICIO	PAGO	SALDO	INTERESES FINANCIEROS	INTERESES BIOMÉTRICOS	SALDO FINAL
0	11,5462	1,0000	10,5462	0,3164	0,5717	11,4343
1	11,4343	1,0500	10,3843	0,3115	0,5629	11,2588
2	11,2588	1,1000	10,1588	0,3048	0,5507	11,0142
3	11,0142	1,1500	9,8642	0,2959	0,5347	10,6949
4	10,6949	1,2000	9,4949	0,2848	0,5147	10,2945
5	10,2945	1,2500	9,0445	0,2713	0,4903	9,8061
6	9,8061	1,3000	8,5061	0,2552	0,4611	9,2224
7	9,2224	1,3500	7,8724	0,2362	0,4268	8,5354
8	8,5354	1,4000	7,1354	0,2141	0,3868	7,7362
9	7,7362	1,4500	6,2862	0,1886	0,3408	6,8156
10	6,8156	1,5000	5,3156	0,1595	0,2882	5,7632
11	5,7632	1,5500	4,2132	0,1264	0,2284	4,5680
12	4,5680	1,6000	2,9680	0,0890	0,1609	3,2180
13	3,2180	1,6500	1,5680	0,0470	0,0850	1,7000
14	1,7000	1,7000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Capitales unitarios constantes: $av_a(X; 0; 15; 0,03; 0)$

PERIODO	SALDO AL INICIO	PAGO	SALDO	INTERESES FINANCIEROS	INTERESES BIOMÉTRICOS	SALDO FINAL
0	9,0464	1,0000	8,0464	0,2414	0,4362	8,7240
1	8,7240	1,0000	7,7240	0,2317	0,4187	8,3744
2	8,3744	1,0000	7,3744	0,2212	0,3998	7,9954
3	7,9954	1,0000	6,9954	0,2099	0,3792	7,5845
4	7,5845	1,0000	6,5845	0,1975	0,3569	7,1390
5	7,1390	1,0000	6,1390	0,1842	0,3328	6,6559
6	6,6559	1,0000	5,6559	0,1697	0,3066	6,1322
7	6,1322	1,0000	5,1322	0,1540	0,2782	5,5644
8	5,5644	1,0000	4,5644	0,1369	0,2474	4,9488
9	4,9488	1,0000	3,9488	0,1185	0,2141	4,2813
10	4,2813	1,0000	3,2813	0,0984	0,1779	3,5576
11	3,5576	1,0000	2,5576	0,0767	0,1387	2,7730
12	2,7730	1,0000	1,7730	0,0532	0,0961	1,9223
13	1,9223	1,0000	0,9223	0,0277	0,0500	1,0000
14	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

El valor actual para las rentas financieras es de $ 12,2961 en el caso de que se trate de capitales constantes y de $ 16.2616 en el caso de capital inicial unitario con variación constante en progresión aritmética.

El valor actual para las rentas actuariales es de $ 9,0464 en el caso de que se trate de capitales constantes y de $ 11,5462 en el caso de capital inicial unitario con variación constante en progresión aritmética.

Se observa que, en ambos casos, los valores actuales de las sucesiones financieras son superiores a los correspondientes a los seguros de vida de capitales múltiples. Ello se debe a que en el primer caso el pago es cierto mientras que en el segundo, el pago depende de la supervivencia del asegurado.

En el caso de los seguros de vida de capitales múltiples, aparece el concepto de intereses biométricos, el cual surge al repartir el dinero invertido entre los sobrevivientes. Si bien matemáticamente resulta indistinto el orden en que se calculan los intereses financieros y biométricos, en los ejemplos que se presentan se realiza primero el cálculo correspondiente a los intereses financieros y luego el de los biométricos. Ello es así porque el dinero es en primer término invertido y luego se reparte.

4. VARIACIONES DE LAS FUNCIONES

A continuación, se muestran resultados de los valores actuales mencionados para distintos plazos, distintas tasas de interés y distintas tasas aditivas de crecimiento de los capitales.

4.1 Rentas financieras de capitales variables en progresión aritmética

A continuación se presentan comparaciones de rentas inmediatas adelantadas de capital inicial unitario variables en progresión aritmética para distintos plazos (n) y tasas de interés efectiva periódica (i), dada la tasa de variación aditiva periódica (r) de los capitales.

Si $r = 0\%$: $\boldsymbol{afv_a(0; n; i; 0)} = \boldsymbol{af(0; n; i)}$

PLAZOS (n) Tasa de interés (i)	15	30	45	60	90	120	n → ∞
3%	12,296	20,188	25,254	28,506	31,932	33,344	34,333
6%	10,295	14,591	16,383	17,131	17,573	17,650	17,667
9%	8,786	11,198	11,861	12,042	12,106	12,111	12,111
12%	7,628	9,022	9,276	9,323	9,333	9,333	9,333
15%	6,724	7,551	7,652	7,665	7,667	7,667	7,667
30%	4,249	4,332	4,333	4,333	4,333	4,333	4,333
45%	3,210	3,222	3,222	3,222	3,222	3,222	3,222
60%	2,664	2,667	2,667	2,667	2,667	2,667	2,667

Si $r = 5\%$: $\boldsymbol{afv_a(0; n; i; 0,05)}$

PLAZOS (n) / Tasa de interés (i)	15	30	45	60	90	120	n → ∞
3%	16,262	32,619	46,917	58,533	74,349	82,983	91,556
6%	13,345	22,136	27,148	29,800	31,798	32,262	32,389
9%	11,174	16,050	17,886	18,526	18,808	18,837	18,840
12%	9,528	12,314	13,014	13,176	13,220	13,222	13,222
15%	8,259	9,894	10,171	10,215	10,222	10,222	10,222
30%	4,893	5,051	5,055	5,056	5,056	5,056	5,056
45%	3,557	3,580	3,580	3,580	3,580	3,580	3,580
60%	2,885	2,889	2,889	2,889	2,889	2,889	2,889

Si $r = 10\%$: $\boldsymbol{afv_a(0; n; i; 0,10)}$

PLAZOS (n) / Tasa de interés (i)	15	30	45	60	90	120	n → ∞
3%	20,227	45,049	68,579	88,560	116,766	132,622	148,778
6%	16,396	29,681	37,913	42,470	46,023	46,873	47,111
9%	13,561	20,902	23,911	25,010	25,510	25,562	25,568
12%	11,427	15,605	16,751	17,030	17,107	17,111	17,111
15%	9,794	12,237	12,690	12,764	12,777	12,778	12,778
30%	5,538	5,771	5,778	5,778	5,778	5,778	5,778
45%	3,905	3,938	3,938	3,938	3,938	3,938	3,938
60%	3,105	3,111	3,111	3,111	3,111	3,111	3,111

Si $r = 25\%$: $\boldsymbol{afv_a(0; n; i; 0,25)}$

PLAZOS (n) / Tasa de interés (i)	15	30	45	60	90	120	n → ∞
3%	32,124	82,339	133,567	178,642	244,017	281,539	320,444
6%	25,547	52,316	70,207	80,477	88,698	90,707	91,278
9%	20,724	35,458	41,987	44,461	45,617	45,740	45,753
12%	17,126	25,481	27,962	28,590	28,769	28,777	28,778
15%	14,399	19,267	20,246	20,414	20,444	20,444	20,444
30%	7,472	7,929	7,944	7,944	7,944	7,944	7,944
45%	4,947	5,012	5,012	5,012	5,012	5,012	5,012
60%	3,766	3,778	3,778	3,778	3,778	3,778	3,778

Si $r = 50\%$: $\boldsymbol{afv_a(0; n; i; 0,50)}$

PLAZOS (n) Tasa de interés (i)	15	30	45	60	90	120	n → ∞
3%	51,951	144,490	241,880	328,778	456,102	529,734	606,556
6%	40,799	90,041	124,031	143,824	159,823	163,763	164,889
9%	32,661	59,719	72,114	76,880	79,128	79,369	79,395
12%	26,623	41,940	46,648	47,857	48,205	48,221	48,222
15%	22,073	30,984	32,840	33,162	33,221	33,222	33,222
30%	10,695	11,526	11,555	11,556	11,556	11,556	11,556
45%	6,685	6,802	6,802	6,802	6,802	6,802	6,802
60%	4,867	4,889	4,889	4,889	4,889	4,889	4,889

Si $r = 100\%$: $\boldsymbol{afv_a(0; n; i; 1)}$

PLAZOS (n) Tasa de interés (i)	15	30	45	60	90	120	n → ∞
3%	91,606	268,791	458,506	629,050	880,272	1.026,124	1.178,778
6%	71,303	165,491	231,679	270,516	302,072	309,876	312,111
9%	56,536	108,239	132,367	141,718	146,150	146,627	146,679
12%	45,619	74,858	84,019	86,390	87,077	87,110	87,111
15%	37,421	54,416	58,028	58,659	58,775	58,778	58,778
30%	17,141	18,721	18,776	18,778	18,778	18,778	18,778
45%	10,160	10,381	10,383	10,383	10,383	10,383	10,383
60%	7,070	7,111	7,111	7,111	7,111	7,111	7,111

Si $r = -2\%$: $\boldsymbol{afv_a(0; n; i; -0,02)}$

PLAZOS (n) Tasa de interés (i)	15	30	45
3%	10,710	15,216	16,589
6%	9,075	11,573	12,077
9%	7,831	9,257	9,450
12%	6,868	7,705	7,782
15%	6,111	6,614	6,645
30%	3,991	4,044	4,044
45%	3,071	3,079	3,079
60%	2,576	2,578	2,578

Seguidamente se comparan rentas inmediatas adelantadas de capital inicial unitario variables en progresión aritmética de n pagos, tasa de interés efectiva periódica $i = 3\%$ y tasa de variación periódica de los capitales r; esto es, $afv_a(0; n; 0{,}03; r)$.

PLAZOS (n) Tasa de variación del capital (r)	15	30	45	60	90	120	n → ∞
0%	12,2961	20,1885	25,2543	28,5058	31,9325	33,3442	34,3333
5%	16,2616	32,6186	46,9168	58,5330	74,3494	82,9832	91,5556
10%	20,2271	45,0487	68,5794	88,5602	116,7664	132,6222	148,7778
25%	32,1236	82,3390	133,5671	178,6419	244,0173	281,5391	320,4444
50%	51,9512	144,4895	241,8800	328,7779	456,1020	529,7339	606,5556
100%	91,6063	268,7906	458,5057	629,0500	880,2716	1.026,1236	1.178,7778
-2%	10,7099	15,2164	16,5892	---	---	---	---
-5%	8,3306	---	---	---	---	---	---

4.2 Rentas actuariales con capitales variables en progresión aritmética

A continuación se presentan comparaciones de seguros de vida de riesgo inmediato de capital inicial unitario variables en progresión aritmética para distintos plazos (n) y tasas de interés efectiva naual (i), dada la tasa de variación aditiva periódica (r) de los capitales. En todos los casos se trabaja con a= 0.95

Si $r = 0\%$: $\boldsymbol{av_a(x;0;n;i;0)} = \boldsymbol{a(x;0;n;i)}$

PLAZOS (n) Tasa de interés (i)	15	30	45	60	90	120	n → ∞
3%	9,046	11,736	12,536	12,774	12,866	12,874	12,875
6%	7,774	9,276	9,567	9,623	9,636	9,636	9,636
9%	6,795	7,660	7,770	7,784	7,786	7,786	7,786
12%	6,031	6,541	6,584	6,588	6,588	6,588	6,588
15%	5,423	5,731	5,749	5,750	5,750	5,750	5,750
30%	3,681	3,714	3,714	3,714	3,714	3,714	3,714
45%	2,895	2,900	2,900	2,900	2,900	2,900	2,900
60%	2,461	2,462	2,462	2,462	2,462	2,462	2,462

$r = 10\%$: $\boldsymbol{av_a(x;0;n;i;0,10)}$

PLAZOS (n) Tasa de interés (i)	15	30	45	60	90	120	n → ∞
3%	14,046	22,258	25,900	27,340	28,064	28,153	28,164
6%	11,693	16,207	17,516	17,853	17,953	17,958	17,959
9%	9,921	12,480	12,970	13,053	13,069	13,069	13,069
12%	8,564	10,055	10,246	10,267	10,270	10,270	10,270
15%	7,507	8,398	8,475	8,481	8,481	8,481	8,481
30%	4,629	4,721	4,722	4,722	4,722	4,722	4,722
45%	3,437	3,451	3,451	3,451	3,451	3,451	3,451
60%	2,819	2,821	2,821	2,821	2,821	2,821	2,821

$r = 25\%$: $\boldsymbol{av_a(x;0;n;i;0,25)}$

PLAZOS (n) Tasa de interés (i)	15	30	45	60	90	120	n → ∞
3%	21,545	38,040	45,945	49,188	50,862	51,071	51,098
6%	17,572	26,604	29,439	30,198	30,429	30,442	30,442
9%	14,610	19,709	20,770	20,958	20,993	20,994	20,994
12%	12,365	15,325	15,738	15,787	15,792	15,792	15,792
15%	10,634	12,398	12,564	12,577	12,578	12,578	12,578
30%	6,052	6,232	6,235	6,235	6,235	6,235	6,235
45%	4,251	4,277	4,277	4,277	4,278	4,278	4,278
60%	3,356	3,361	3,361	3,361	3,361	3,361	3,361

$r = 50\%$: $\boldsymbol{av_a(x;0;n;i;0,50)}$

PLAZOS (n) Tasa de interés (i)	15	30	45	60	90	120	n → ∞
3%	34,045	64,344	79,354	85,602	88,858	89,268	89,320
6%	27,370	43,931	49,311	50,773	51,223	51,247	51,248
9%	22,424	31,759	33,771	34,131	34,200	34,201	34,202
12%	18,699	24,109	24,891	24,985	24,996	24,997	24,997
15%	15,846	19,064	19,379	19,404	19,406	19,406	19,406
30%	8,424	8,750	8,755	8,755	8,755	8,755	8,755
45%	5,607	5,655	5,655	5,655	5,655	5,655	5,655
60%	4,251	4,260	4,260	4,260	4,260	4,260	4,260

$r = 100\%$: $\boldsymbol{av_a(x;0;n;i;1) = aI(x;0;n)}$

PLAZOS (n) Tasa de interés (i)	15	30	45	60	90	120	n → ∞
3%	59,043	116,952	146,172	158,429	164,850	165,661	165,766
6%	46,966	78,586	89,056	91,922	92,809	92,857	92,860
9%	38,053	55,858	59,772	60,479	60,614	60,617	60,617
12%	31,366	41,678	43,199	43,382	43,405	43,405	43,405
15%	26,269	32,396	33,009	33,059	33,062	33,062	33,063
30%	13,167	13,786	13,796	13,796	13,796	13,796	13,796
45%	8,319	8,410	8,410	8,410	8,410	8,410	8,410
60%	6,042	6,059	6,059	6,059	6,059	6,059	6,059

$r = -2\%$: $\boldsymbol{av_a(x;0;n;i;-0,02)}$

PLAZOS (n) Tasa de interés (i)	15	30	45
3%	8,046	9,632	9,864
6%	6,990	7,890	7,977
9%	6,170	6,696	6,730
12%	5,524	5,838	5,852
15%	5,006	5,198	5,204
30%	3,491	3,513	3,513
45%	2,786	2,790	2,790
60%	2,389	2,390	2,390

Resulta interesante mostrar como caso particular aquél en el que se verifica que r = - 1/n[3] dado que el mismo da lugar a los denominados decreasing:

PLAZOS (n) Tasa de interés (i)	15	30	45	60	90	120	n → ∞
3%	85,699	246,879	430,505	620,805	1.005,965	1.392,119	1.287.347,109
6%	77,411	208,978	351,014	495,075	784,054	1.073,141	963.553,140
9%	70,674	181,594	297,634	414,325	647,883	881,454	778.518,597
12%	65,123	161,094	259,676	358,479	556,125	753,772	658.786,713
15%	60,493	145,276	231,443	317,688	490,188	662,688	574.972,688
30%	45,724	101,348	157,061	212,776	324,204	435,633	371.418,490
45%	38,000	81,490	124,990	168,490	255,490	342,490	289.994,490
60%	33,327	70,249	107,172	144,095	217,941	291,787	246.150,249

[3] Debe tenerse presente que $aD(x;0;n;i) = \ n\ .\ av_a(x;0;n;i;-1/n)$

A continuación se comparan seguros de vida de capitales múltiples de capital inicial unitario variables en progresión aritmética de n pagos, tasa de interés efectiva anual $i = 3\%$ y tasa de variación periódica de los capitales r; esto es, $av_a(x; 0; n; 0{,}03; r)$.

PLAZOS (n) Tasa de variación del capital (r)	15	30	45	60	90	120	n → ∞
0%	9,0464	11,7365	12,5364	12,7743	12,8451	12,8661	12,8750
5%	11,5462	16,9973	19,2182	20,0570	20,3595	20,4653	20,5195
10%	14,0460	22,2580	25,8999	27,3398	27,8740	28,0645	28,1641
25%	21,5454	38,0403	45,9452	49,1879	50,4175	50,8620	51,0977
50%	34,0445	64,3441	79,3540	85,6016	87,9899	88,8579	89,3203
100%	59,0427	116,9518	146,1715	158,4288	163,1348	164,8498	165,7656
-2%	8,0464	9,6322	9,8637				
-5%	6,5466						

CONCLUSIONES

El siguiente cuadro muestra los valores actuales de las sucesiones de capitales en cada uno de los casos que se han analizado.

Rentas de capital inicial unitario variables en progresión aritmética		
m	Actuariales $[av_a(x;m;n;r)]$	Financieras $[afv_a(m;n;i;r)]$
m	$av_a(x;m;n;r) = (a.v)^m.\left\{\frac{1-(a.v)^n}{1-a.v} + \frac{r.(a.v)}{1-a.v}.\left[\frac{1-(a.v)^{n-1}}{1-a.v} - (n-1).(a.v)^{n-1}\right]\right\}$	$afv_a(m;n;i;r) = v^m.\left\{\frac{1-v^n}{1-v} + \frac{r.v}{1-v}.\left[\frac{1-v^{n-1}}{1-v} - (n-1).v^{n-1}\right]\right\}$
0	$av_a(x;0;n;r) = \frac{1-(a.v)^n}{1-a.v} + \frac{r.}{1-a.v}.\left[\frac{a.v.(1+(n-1).(a.v)^n) - n.(a.v)^n}{1-a.v}\right]$	$afv_a(0;n;i;r) = \frac{1-v^n}{1-v} + \frac{r.}{1-v}.\left[\frac{v.(1+(n-1).v^n) - n.v^n}{1-v}\right]$
1	$av_a(x;1;n;r) = (a.v).\left\{\frac{1-(a.v)^n}{1-a.v} + \frac{r.(a.v)}{1-a.v}.\left[\frac{1-(a.v)^{n-1}}{1-a.v} - (n-1).(a.v)^{n-1}\right]\right\}$	$afv_a(1;n;i;r) = v.\left\{\frac{1-v^n}{1-v} + \frac{r.v}{1-v}.\left[\frac{1-v^{n-1}}{1-v} - (n-1).v^{n-1}\right]\right\}$

Obsérvese que si $r = 0$, todos los capitales son unitarios y se obtienen las expresiones de las rentas de capitales unitarios constantes. Esto es:

Rentas de capitales unitarios constantes		
m	Actuariales $[a(x;m;n)]$	Financieras $[af(m;n;i)]$
m	$av_a(x;m;n;0) = a(x;m;n) = (a.v)^m.\left[\frac{1-(a.v)^n}{1-a.v}\right]$	$afv_a(m;n;i;0) = af(m;n;i) = v^m.\left(\frac{1-v^n}{1-v}\right)$
0	$av_a(x;0;n;0) = a(x;0;n) = \frac{1-(a.v)^n}{1-a.v}$	$afv_a(0;n;i;0) = af(0;n;i) = \frac{1-v^n}{1-v}$
1	$av_a(x;1;n;r) = a(x;1;n) = (a.v).\left[\frac{1-(a.v)^n}{1-a.v}\right]$	$afv_a(1;n;i;0) = af(1;n;i) = v.\left[\frac{1-v^n}{1-v}\right]$

A partir de su análisis surge que:

- Tanto en las rentas financieras como en las actuariales desarrolladas, si se comparan los valores obtenidos para capitales constantes con los que se obtienen para capitales variables en progresión aritmética, se observa que la diferencia se encuentra en que se agrega el sumando que contempla la razón de variación de los capitales. Este sumando resulta del producto entre la razón mencionada y una renta *increasing* diferida por un año.
- Las rentas financieras podrían definirse como un caso particular de rentas actuariales bajo la ley de Dormoy. Si se observan los resultados obtenidos puede verse que en las actuariales aparece $a.v$ en lugar de v. De este modo, si se asume que $a = 1$, se llega a las expresiones obtenidas en el caso de las rentas financieras. Se debe hacer hincapié en que asumir $a = 1$ significa certeza que justamente es lo que distingue a las rentas financieras de las actuariales.
- Las rentas actuariales aplicando la ley de Dormoy son equivalentes a rentas financieras calculadas a una tasa $i^* = [(1+i)/a] - 1.$ Lo expuesto se verifica tanto para las rentas de capitales constantes como para el caso de capitales variables

- A partir de los desarrollos realizados, y en el contexto de este trabajo, se observa la utilidad del cálculo de estos valores actuales. Dichos valores actuales representan el capital que la persona debería tener constituido a la edad prevista de retiro a fin de que pueda cobrar en forma periódica las sumas previamente definidas. El esquema expuesto permite el cálculo de sumas constantes o variables, con carácter cierto o aleatorio – sujeto a la condición de que la persona se encuentre con vida – Cabe resaltar que se trabaja con tasas de interés de largo plazo en el marco de una economía estable.

  Para ilustrar este punto, se muestra un ejemplo en el que se analiza la situación previamente planteada:

  Se supone que una persona de 35 años proyecta retirarse a los 65. A partir de esta última edad desea realizar retiros anuales equivalentes a $ 1.200.000. el primero de ellos y luego, crecientes anualmente en $ 120.000.-Se supone que la tasa de interés anual es del 4 % y que la razón anual de permanencia por supervivencia bajo la ley de Dormoy es el 97 %. Se calcularán los valores actuales a la edad de 65 años para:

  a) 20 años con carácter cierto. Se aplica el concepto de renta financiera
  b) 20 años con carácter aleatorio. Se aplica el concepto de renta actuarial.
  c) Una cantidad de años equivalente a la vida media del individuo[4]. Se aplica el concepto de renta financiera.

  Bajo las condiciones mencionadas se tiene que:

CONDICIÓN	VALOR ACTUAL	
a	$	30.884.000,03
b	$	23.128.380,10
c	$	20.978.001,84

  Puede observarse que:

  - El capital necesario es mayor en el caso de que los 20 pagos sean de carácter cierto. Debe tenerse en cuenta que justamente por esta condición, en el caso de que la persona fallezca en el transcurso de esos 20 años, el importe que no ha cobrado pasa a formar parte del acervo hereditario.
  - En el tercer caso el valor actual se reduce porque los años probables de cobro considerados resultan equivalentes a la vida media de la persona a los 65 años – 4 años y once meses bajo las hipótesis planteadas -.[5]

Sin perjuicio de las limitaciones mencionadas en el desarrollo de este trabajo, cabe destacar que conclusiones similares pueden obtenerse utilizando otras leyes de mortalidad usuales o tablas de mortalidad. La cuantía de los valores actuales naturalmente variará en cada caso y no será sencillo, en muchas ocasiones, realizar un análisis comparativo a partir de fórmulas cerradas. Sin embargo, el valor actual de una renta actuarial será siempre menor que el de una renta financiera, dados igual estructura de pago, plazo, tasa de interés y momento de valuación.

Asimismo, nótese que el análisis desarrollado precedentemente puede llevarse a cabo también, bajo supuestos alternativos en cuanto a la determinación de los capitales (por ejemplo, capitales

[4] Se define como vida media la cantidad de años que en promedio vivirá una persona a una edad determinada (en este caso la seleccionada como inicio de cobros: 65) si la cantidad de años que restan vivir a los componentes del grupo se repartiera por igual entre los mismos. Para su cálculo se emplea la ley de Dormoy.
[5] Debe aclararse que cuando se trabaja con tablas de mortalidad, los valores actuales calculados en términos financieros con plazo equivalente a la vida media son similares a los obtenidos mediante la aplicación de las rentas actuariales.

crecientes en progresión geométrica), a la constancia de la tasa de interés durante toda la vigencia considerada y a la de la ley de mortalidad empleada en el presente análisis.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bowers, G.; Hickman, J. & Nesbitt (1997). *Actuarial Mathematics*. U.S.A.: The society of Actuaries.

Casparri, María Teresa, Metelli, María Alejandra y Mutchinick, Paula (2012). *Aplicación de los seguros de personas a la gestión actuarial*. Buenos Aires, Argentina: Eudeba.

Castegnaro, Aída Beatriz (2009). *Curso de Cálculo Financiero*. Editorial La Ley, Buenos Aires.

Garnica Hervas, J. R.; Thomasz, E. O. y Garofalo, R. (2008). *Calculo financiero: Teoría, ejercicios y aplicaciones*. EC, Buenos Aires.

Jordan, C. W. (1975). *Life Contingencies*. U.S.A.: The society of Actuaries.

Murioni, O. y Trossero, Á. (2005). *Manual de Cálculo Financiero*. Fondo Editorial Consejo Profesional de Ciencias Económicas de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Buenos Aires.

Gonzalez Galé, J. (1979). *Matemáticas financieras: intereses y anualidades ciertas*. Macchi, Buenos Aires.

Levi, E. (1964). *Curso de Matemática Financiera y Actuarial*. Volúmenes I y II. Editorial Bosch, Barcelona.

Nieto De Alba, U. – Asencio, J. V. (1983). *Matemática Actuarial*. España: Fundación Mapfre Estudios.